Oblig i MAT4010: Polynomer

Håvard Bjørgum

May 15, 2015

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Funksjonsdrøfting, og da spesielt det å kunne finne røttene til et polynom, er en sentral del av pensum i matematikkfaget på videregående skole. Det legges spesielt mye vekt på drøfting av andregradspolynomer. Denne oppgaven er sentrert rundt disse temaene, som kan knyttes til følgende kompetansemål:

VG1: "berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta"

VG2: "faktorisere polynomer ved hjelp av nullpunkter og polynomdivisjon, og bruke dette til å løse likninger og ulikheter med polynomer og rasjonale uttrykk".

Innledningsvis ser vi på løsninger av likninger i historisk perspektiv. Deretter tar vi for oss andregradpolynomer. Oppgaven inneholder også en del resultater om polynomer av høyere grad. Noen steder er det kommentert kort hvordan resultatene eventuelt kan tas med i undervisning.

2 Historisk innledning til løsninger av andregradsuttrykk

Behovet for kunne løse likninger av ulike typer har oppstått regelmessig opp gjennom historien. Problemløsning som vi idag vil tolke som likningsproblemer, finner vi igjen i mange ulike historiske etterlevninger; på leirtavler fra Mesopotamia, papyruser fra Egypt og ikke minst fra grekerne og den hellinistiske perioden.

Det er verdt å merke seg at både problemer og løsninger er beskrevet med ord og få symboler. "Algebraens skriftspråk" slik vi kjenner det idag begynte å gjøre seg gjeldende først på 1600-tallet. Det bør og bemerkes at man ikke gjorde bruk av negative tall - og langt mindre imaginære tall, noe som naturligvis får konsekvenser når man håndterer andregradsuttrykk.

2.1 Babylonsk likningsløsning

Allerede før år 2000 begynte sumererne å utvikle et strukturert samfunn med et eget skriftspråk. De var blant annet opptatt av astronomi,renteregning og geometri, men også likninger. Leirtavler gir eksempler på at de evnet å løse problemer som svarer til å løse både førstegrads- og andregrads- likninger. Et konkret eksempel viser at de klarer et å løse et problem som svarer til å løse likningen $x^2 + x - 3/4 = 0$. De oppgir den positive løsningen $x = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$.

Måten de løser denne likningen på gjør at man kan spørre seg om babylonerne hadde en formel (bestående av ord og ikke bokstaver) tilsvarende vår egen abc-formel - i møte med andregradsuttrykk. Forskere tror ikke de hadde det, men det viser seg at fremgangsmåten for å løse ulike andregradsuttrykk ser ut til å følge en slags algoritme. Hvordan de kom frem til en slik algoritme vet man ikke sikkert. Gjetninger går ut på at de kan ha redusert en andregradslikning til et lineært likningssystem med to ukjente.

At negative tall ikke eksisterte gjorde at man skilte mellom ulike typer andregradsuttrykk. Spesielt kunne man ikke håndtere likninger av typen $x^2 + ax + b = 0$, slik at a, b er positive - ettersom enhver løsning her må være negativ. Tilfellene man så på ble dermed:

a) $x^2 - ax - b = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax = b$

b) $x^2 + ax - b = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax = b$

c) $x^2 - ax + b = 0 \Leftrightarrow x^2 + b = ax$

Grunnen til at jeg har omskrevet likningene, er at den andre formen likner mer på hvordan babylonerne så på de disse problemen. Babylonerne ville aldri ha uttrykt at en sum er lik 0 - ettersom dette ikke ville gi noe praktisk mening.

2.2 Egyptisk likningsløsning

I det egyptiske riket utviklet man også tidlig et skriftspråk. Egypterne skrev på papyruser, men få av disse er bevart til vår tid. Fra de som er bevart, som dateres tilbake til 1850 før Kristus, vet vi imidlertid at de blant annet gjorde et godt estimat av π. I likningsløsning bruker de blant annet en metode kjent som "regula falsi". Denne gikk på å prøve en løsning, vurdere "hvor feil" den var, og deretter forsøke en annen løsning. Det finnes et klagjørende eksempel av metoden hos Ohnstad(s.25-26). Likningene er for det meste enkle, men noen problemer knyttet til areal fører også til noen kvadratiske likninger. De evnet også å estimere løsninger til disse.

2.3 Hellenistisk likningsløsning

Når vi kommer til matematikken i den hellenistiske perioden begynner den matematiske argumentasjon å likne noe mer den vi er vant med idag. Mange navn og resultater er her verdt å nevne, ikke minst har Euklids verk "Elementene" hatt stor betydning for matematikken utvikling.

Når det gjelder likningsløsning, var grekernes innfallsvinkel nesten ensidig geometrisk. Dette hadde konsekvenser for hva slags andregradslikninger som ble behandlet. For grekerne gav det mening å snakke om å addere to areal for å få et tredje areal, eller trekke fra et mindre areal av et større. Med dagens algebra tilsvarer dette:

a) $x^2 + ax = b^2$

b) $x^2 - ax = b^2$

c) $c)ax - x^2 = b^2$

Grunnen til at vi må ha et kvadrat på høyre side, er at man geometrisk sett ikke kan addere to areal og få en linje - vi må ha lik dimensjon. Vi kan heller ikke addere tre areal og få 0, som ville tilsvart likningen $x^2 + ax = -b^2$. Vi kjenner igjen de aktuelle situasjonene fra den babylonske likningsløsningen. De geometriske argumentene som brukes for å løse disse likningene er beskrevet hos Ohnstad (s.45 - 50).

2.4 Arabisk likningsløsning

Mange av de viktige matematiske oppdagelsene som ble gjort i tiden etter den hellenistiske perioden, ble gjort av arabere. En av disse matematikerne var Mohammad ibn Musa al-Khwarizmi. Han var blant de første til å systematisere algebraiske regneregler - som for eksempel gyldigheten av å substrahere like mye på begge sider av likning. Ordet algebra stammer fra al-jabr, et ord som er inneholdt i tittelen på verket hvor han redegjør for disse regnereglene. Han behandler også andregradslikinger på en grundig måte ved å dele dem opp i 6 tilfeller:

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $bx = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $bx + c = ax^2$

I motsetning til grekerne ser man det ikke som tvingende nødvendig at alle ledd skal ha samme dimensjon. Al-Khwarizmi var også den første som behandlet irrasjonale løsninger. For hvert enkelt tilfelle gir han dessuten forklaringer som likner generelle løsningsalgoritmer. Han gir ikke formler for løsningene, men han gjennomgår et generisk eksempel i hvert tilfelle og kommer med generelle betrakninger. Det kommer også frem at han har oversikt over hvor mange løsninger de ulike likningstypene potensielt har.

2.5 Fra Descartes til skolen idag

Allerede i det 7. århundre oppgir indieren Brahmagupta negative røtter til andregradsligninger. En systematisert og komplett drøfting av røttene til en andregradsliknings kunne man likevel ikke få før man hadde innført komplekse tall. Dette ble gjort på 1600- og 1700- tallet og sentrale skikkelser var Abraham de Moivre, Leonhard Euler og Carl Friedrich Gauss. I skolen idag er elevers første møte med andregradslikninger som oftest på 10 trinn, men da kun på formen $y = ax^2$. En mer utførlig drøfting og beskrivelse av røttene kommer man til 1.klasse på videregående skole. Da lærer man den såkalte abc-formelen, som vi skal se nærmere på nedenfor.

3 Andregradspolynomer i skolen idag

3.1 abc - formelen

Gitt et generelt andregradspolynom $ax^2 + bx + c$. Da kan man ved bruk av den såkalte abc-formelen finne røttene: $x_i = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)})/2a$, $i = 0, 1$
At formelen er korrekt kan bevises på følgende måte:

$ax^2 + bx + c = 0$
$4a^2x^2 + 4abx + +4ac = 0$
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3.2 Nullpunktsformelen

Elevene på vgs. lærer dette (beviser det) i 1.klasse. Senere i samme skoleår kommer man til den såkalte nullpunktsformelen, som sier at $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$, der x_i er røttene funnet ved abc-formelen.

At denne formelen stemmer gis det noen eksempler på, men ikke alle lærebøker gir gode argumenter for at formelen holder generelt. At formelen er riktig, gitt at abc-formelen er korrekt, kan man vise på flere måter.

Alternativ 1:
En måte å vise at formelen holder generelt, kan være å sjekke det ved "brute force", som i dette tilfellet vil si innsetting:

$a(x - x_0)(x - x_1) = a(x^2 - x(x_0 + x_1) + x_o x_1)$

$$x_0 + x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$
$$x_0 x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Vi ser nå at formelen stemmer: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$

Alternativ 2:
En annen måte å vise nullpunktsformelen er å bruke et resultat fra polynomdivisjon. Man kan bruke et resultatet som sier at dersom x_i er en rot tilhørende et polynom $f(x)$, så må polynomet inneholde faktoren $(x - x_i)$
Mer nøyaktig:

Setning 1
La $f(x)$ være et polynom. Hvis $f(x_0) = 0$, så vil $f(x) = (x - x_0)q(x)$, der q(x) er et polynom.

Bevis:

$\frac{f(x)}{(x - x_o)} = q(x) + \frac{r}{(x - x_o)}$, der resten r er et polynom av lavere grad enn førstegradspolynomet $(x - x_o)$, altså ett tall.
$\Rightarrow f(x) = q(x)(x - x_o) + r$
$\Rightarrow f(x_o) = r = 0$, siden vi har antatt at x_o er en rot til f(x).
$\Rightarrow f(x) = q(x)(x - x_o)$

Altså vet vi nå, gitt at polynomet $ax^2 + bx + c$ har røttene x_0, x_1, at $ax^2 + bx + c = (x - x_o)(x - x_1) \times r(x) = (x^2 - x(x_0 + x_1) + x_o x_1) \times r(x)$, der vi egentlig ikke kjenner r(x). Men ettersom venstresiden av den siste likheten inneholder monomet ax^2, må vi imidlertid ha at r(x) = a, og dermed har vi vist at $a(x - x_o)(x - x_1)$ er en korrekt faktorisering

Resultatet følger som vi ser direkte av definisjonen av hvordan man utførerer polynomdivisjon, men det kan være verdt å merke seg at elevene vanligvis gjennomgår dette etter at de har lært nullpunktsformelen. En mulighet kan være å gi elevene dette alternative beviset i etterkant av at man har gjennomgått polynomdivisjon. På den måten får man både repetert nullpunktsformelen og man får se en applikasjon av polynomdivisjon.

3.3 Vietas formler

Da vi ovenfor utledet nullpunktsformelen ved innsettingsmetoden (alternativ 1), kom vi frem til en interessant relasjon mellom røttene og koeffisientene til polynomet. Vi viste at:

$$x_0 + x_1 = \frac{-b}{a}$$
$$x_0 x_1 = \frac{c}{a}$$

Disse formlene kalles Vietas formler. Setter vi $a = 1$, får vi enda enklere
$x_0 + x_1 = -b$
$x_0 x_1 = c$

Formlene kan på den ene siden brukes til å produsere likninger med heltalls løsinger, noe som kan være praktisk for lærere.

Eksempel:
La $x_0 = 3$ og $x_1 = 5 \Rightarrow -b = 3 + 5 = 8 \Rightarrow b = -8$, og $c = 3 \times 5 = 15$. Altså

vil likningen $x^2 - 8x + 15 = 0$, ha heltallsløsningene 3 og 5.

På en annen side kan formlene brukes til å finne røttene til et andregradspolynom på en enkel måte. Man trenger kun å finne 2 tall slik at summen av dem blir -b og produktet blir c.

Eksempel:
$x^2 - 5x + 6 = 0$ har løsningene 2 og 3 fordi 2+3=5 og 2*3=6.

Vietas formler er også nyttig på en annen måte. De gir oss en måte å finne ekstremalverdiene til et andregradspolynom med reele røtter. En andregradsfunksjon med reele røtter (se figur nedenfor), vil alltid ha sitt ekstremalpunkt midt mellom de to røttene, altså i argumentet $\frac{x_0+x_1}{2} = \frac{-b}{2a}$.

I tilfellet med to komplekskonjugerte røtter, kan vi ikke bruke det samme geometriske argumentet. At ekstremalpunktet også befinner seg midt mellom de to komplekskonjugerte røttene $u \pm iv$ stemmer likevel. Vi kan se dette algebraisk:

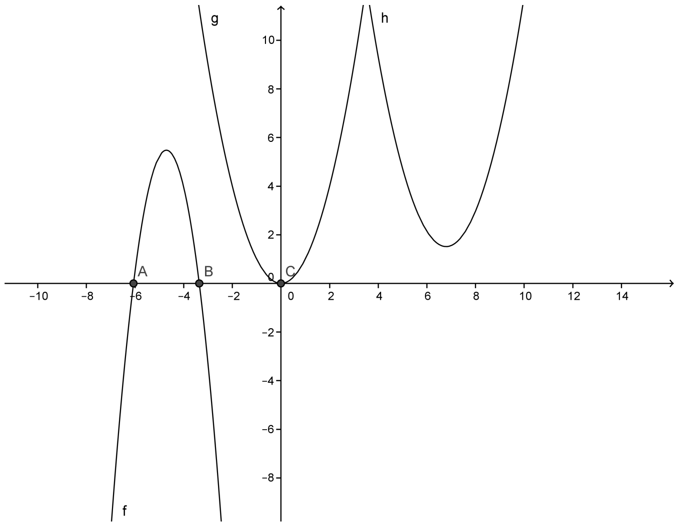
$$x_0 + x_1 = \frac{-b}{a} \Rightarrow (u + iv) + (u - iv) = \frac{-b}{a} \Rightarrow u = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{x_o + x_1}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Vi kunne naturligvis kommet frem til ved å drøfte den deriverte til polynomet vårt, men noe av poenget her er at elevene ennå ikke har lært derivasjon.

4 Røtter med multiplisitet

Definisjon: Vi sier at en polynom f(x) har en rot i punktet r av multiplisitet m dersom vi kan skrive $f(x) = (x - r)^m g(x)$, slik at $g(r) \neq 0$

Røttene til et andregradspolynom er som nevnt gitt ved $x_i = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, $i = 0, 1$. Hva slags type røtter vi får er avhengig av diskrimanten. Om vi får to komplekskonjugerte røtter, to reele røtter, eller 1 reel rot med multiplisitet 2, avhenger av om diskriminanten $\sqrt{b^2 - 4ac}$ er henholdsvis negativ, positiv eller lik 0. Geometrisk tilsvarer dette de 3 situasjonene som er avbildet nedenfor. Funksjonen h har to komplekskonjugerte røtter, f har to reele røtter og g har en reel rot med multiplisitet 2.



La oss se nærmere på tilfellet hvor vi har en funksjon slik som g(x), som har en rot r med multiplisitet 2. Vi observerer at grafen tangerer x-aksen i roten, istedenfor å krysse x-aksen. Altså ser vi at roten i dette tilfellet sammenfaller med det punktet hvor den deriverte til funksjonen er lik 0.

Dette kan vi også komme frem til algebraisk. Vi vet jo at roten r er gitt ved $r = (-b \pm \sqrt{0})/2a = -b/2a$. Samtidig vet vi at hvis $g(x) = ax^2 + bx + c$, så er $g'(x) = 2ax + b$. Men $2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$. Altså ser vi at $f(x)$ har en rot i r med multiplisitet 2, og $f'(x)$ har en rot i r med muliplisitet 1.

Det vi nå har vist er med andre ord at dersom vi har et andregradspolynom, med en rot med multiplisitet 2, så vil den deriverte av polynomet ha en rot i samme punkt av multiplisitet 1. Det er nærliggende å spørre seg om dette kan generaliseres, noe vi nå skal se at det kan:

Setning 2
La p(x) være et polynom av grad n og la $m > 1$. Dersom $p(x)$ har en rot av mulitplisitet m i punktet r, så vil $p'(x)$ ha en rot av multiplisitet $m-1$ i punktet r. Dersom roten r er av multiplisitet 1, så vil den deriverte funksjonen ikke ha noen rot i punktet r.
Bevis:
$p(x) = q(x)(x-r)^m$ slik at $q(r) \neq 0$, ved antakelsen
$p'(x) = q'(x)(x-r)^m + q(x)m(x-r)^{(m-1)}$
$p'(x) = (x-r)^{(m-1)}(q'(x)(x-r) + q(x)m)$
$p'(r) = (r-r)^{m-1}(q'(r)(r-r) + q(r)m) = 0(0 + q(r)m)$
$\Rightarrow p'(x)$ har en rot i r av multiplisitet $m-1$, siden vi har antatt at $q(r) \neq 0$.

La oss se hva som skjer med $p'(x)$ dersom $p(x)$ har en rot i r med multiplisitet 1. I dette tilfellet har vi at $p(x) = q(x)(x-r)$, der $q(r) \neq 0$.
$p(x) = q(x)(x-r) \Rightarrow p'(x) = q'(x)(x-r) + q(x)$
$\Rightarrow p'(r) = q'(r)(r-r) + q(r) = q(r) \neq 0 \Rightarrow p'(r) \neq 0$. Den deriverte funksjonen vil med andre ord ikke ha noen rot i punktet r.

Det er også mulig å ta dette resultatet noe videre, og se på roten r til den m-te deriverte av funksjonen. Faktisk har vi at:

Setning 3
Anta at r er en rot til $f(x)$ og la $m > 0$. Da har vi at r er en rot av multiplisitet m hvis og bare hvis $f(r) = f'(r) = ... = f^{m-1}(x) = 0$ og $f^m(x) \neq 0$.

Bevis
Anta først at r er en rot med multiplisitet $m = 1$. Fra setning 2 vet da at $f'(r) \neq 0$, og vi ser at resultatet altså stemmer for $m = 1$. Anta nå at resultet stemmer for $m = k$, altså at hvis $f(x)$ har en rot i r med multiplisitet k, så vil $f(r) = f'(r) = ... = f^{k-1}(x) = 0$ og $f^k(x) \neq 0$.

Vi ønsker å vise at dette medfører sannhet for påstanden i tilfellet $m = k+1$. Anta derfor at $f(x)$ har en rot i r med multiplisitet $k+1$. Vi ønsker da å vise at $f(r) = f'(r) = ... = f^k(x) = 0$ og $f^{k+1}(x) \neq 0$. Fra setning 2 vet vi at $f'(x)$ har en rot i r med multiplisitet $(k+1) - 1 = k$. Ved vår induksjonsantakelse følger det at $f'(r) = ... = f^k(x) = 0$ og $f^{k+1}(x) \neq 0$. Men vi vet også at $f(x)$ har en rot i punktet r, altså at $f(r) = 0$. Dermed holder påstanden for tilfellet $m = k+1$, og vi er ferdige.

Anta nå at $f(r) = f'(r) = ... = f^{m-1}(x)$ og $f^m(x) \neq 0$. Vi ønsker å vise at $f(x)$ har en rot i r med multiplisitet m. Observer først at $f^{m-1}(x)$ har en rot i punktet r, mens $f^m(x)$ ikke har det. Fra setning 2 vet vi at dersom multiplisiteten til roten r tilhørende polynomet $f^{k-1}(x)$ hadde vært noe annet enn 1, så måtte $f^k(x)$ hatt en rot i punktet r. Derfor må altså multiplisiteten til roten r (tilhørende polynomet $f^{k-1}(x)$) være 1. Vi har antatt at $f(r) = 0$, altså at $f(x)$ har en rot i puntet r. La oss kalle multiplisiteten til denne roten for x. Fra setning 2 har vi at $f'(x)$ har en rot i punktet r med multiplisitet $x - 1$. Ved samme argumentasjon får vi at f^{k-1} har en rot i punktet r med multiplisitet $x - (k-1)$. Dermed får vi at $x - (k-1) = 1 \Rightarrow x = k$

4.1 Odde multiplisitet og partalls multiplisitet

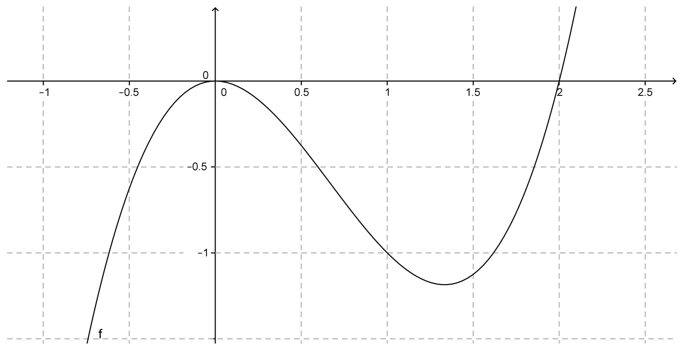
I denne seksjonen ønsker vi å si noe om hvordan et generelt polynom av grad n oppfører seg i nærheten av sine reelle røtter. La oss i denne seksjonen derfor anta at vi har å gjøre med en reele røtter og ikke imaginære røtter. Ovenfor så vi hvordan grafen til et andregradspolynom tangerte x-aksen når vi hadde en reel rot med multiplisitet 2. I tilfellet med 2 ulike reele røtter med multiplisitet 1, så vi hvordan funksjonen krysset x-aksen. Mer generelt har vi følgende resultat:

Anta at et polynom har en reel rot i punktet r. Grafen til polynomet vil tangere x-aksen i r hvis og bare hvis roten r har partalls multiplisitet. På samme måte har vi at grafen til et polynom vil skjære x-aksen i roten r hvis og bare hvis roten r har odde multiplisitet. Vi skisserer et bevis for den andre påstanden:

Anta først at funksjonen har odde multiplisitet i roten r. Da kan vi skrive $f(x) = (x - r)^{(2n+1)}Q(x)$, der vi vet at $Q(r) \neq 0$ og at Q(x) er et polynom. Ettersom polynomer er kontinuerlige funksjoner vet vi at vi kan finne en omegn $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, slik at $Q(x)$ ikke skifter fortegn. Skifte fortegn i dette området gjør imidlertid faktoren $(x - r)^{(2n-1)}$ i punktet r, og dermed må grafen skjære x-aksen i dette punktet.

Anta nå at grafen skjærer x-aksen i roten r. La oss anta at $f(x + \epsilon) < 0$ og $f(x+\epsilon) > 0$. Vi vet at vi kan skrive $f(x) = (x-r)^m Q(x)$, der $Q(r) \neq 0$. Ved samme argumentasjon som ovenfor vet vi at vi kan finne et område rund punktet $x = r$ hvor $Q(x)$ ikke skifter fortegn, og dermed må m være odde.

I eksempelet nedenfor, hvor vi har å gjøre med en polynomfunksjonen, kan vi dermed vite roten $x = 0$ har lik multiplisitet, mens roten $x = 2$ har odde multiplisitet.



Ved å se på grafen ovenfor, kan vi faktisk vite enda mer om den roten som har odde multiplisitet. Vi ser nemlig av grafen at tangenten i $x = 2$ ikke er horisontal, noe som medfører at den deriverte $f'(x)$ ikke har en rot i punktet $x = 2$. Fra setning 2 vet vi dermed at roten $x = 2$ må ha multiplisitet 1. Generelt har vi altså at dersom en funksjon har en rot r hvor grafen ikke tangerer x-aksen, så må roten ha multiplisitet 1.

Ut fra å se på grafen ovenfor kan vi altså si noe om røttenes multiplisitet. Det er også mulig å gå andre veien. Ved å se på røttenes multiplisitet, kan vi si noe om hvordan grafen vil se ut. En funksjon hvor multiplisiteten til alle røttene er partall, vil aldri skjære x-aksen. Dersom man finner en funksjonsverdi som er positiv, så vet man dermed at funksjonen alltid er ikke-negativ. Dersom en av røttene derimot har odde multiplisitet så vet vi at funksjonen både har positive og negative funksjonsverdier. Videre kan vi vite at antall ganger grafen skjærer x-asken er lik antall distinkte røtter med odde multiplisitet.

La oss se på et eksempel hvor vi kan bruke disse resultatene til å få en intuisjon over hvordan en graf til et polynom kan se ut. La $f(x) = x^2(x-1)(x-2)^3$. Vi observer at funksjonen har to reele røtter med odde multiplisitet, $x = 2$ og $x = 5$. Dermed må grafen krysse x-aksen akkurat 2 ganger - i nettopp disse punktene. Siden $f(-1) = (-1)^2(-1-1)(-1-2) = 6 > 0$, har vi at $f(x)$ er ikke-negativ for $x < 1$. For $x \in (1, 2)$ så må $f(x)$ være ikke-positiv. I roten $x = 2$ krysser grafen x-aksen for andre og siste gang. For $x > 2$ må altså funksjonsverdiene være ikke-negative. Merk at på grunn av multiplisiteten i roten $x = 1$ har vi ikke en horisontal tangent her. I roten $x = 2$ må vi derimot ha en horistontal tangent. Vi observerer også at $f(x)$ kun har en rot med partalls multiplisitet, $x = 0$. Dette er dermed eneste punktet hvor grafen tangerer x-aksen uten å krysse den. Vi har nå et godt utgangspunkt for å skissere grafen.

5 Om antall røtter og om ulike typer av røtter

I denne seksjonen ser vi på et berømt resultat som sier noe om antall røtter til et polynom av grad n. Vi tar også med et resultat som sier noe om kandidatene til rasjonale røtter til polynomer av grad n, og en konsekvens av dette: at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

5.1 Algebraens fundamentalteorem

La g(x) være en polynom av grad n med komplekse koeffesienter: $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^(n-1) + ... + a_o$. Algebraens fundamentalteorem sier at finnes n komplekse røtter til et slikt polynom (dersom vi teller røttene med multiplisitet). Vi tar ikke med et bevis for dette i denne oppgaven. Resultatet kan likevel nevnes i vgs. Elevene kan sjekke at påstanden i teoremet stemmer i de tilfellene de har gjennomgått, altså for førstegradspolynomer og andregradspolynomer hvor koeffisientene er reele tall. Om det er innenfor rekkevidden til noen av elevene, kan de også sjekke at resultet stemmer når koeffisientene er komplekse. At røttene må kunne være både reele og komplekse kan også kommenteres. Dette kommer tydelig frem ved å se på abc-formelen, som viser at i noen tilfeller vil røttene være komplekse.

5.2 Rasjonale røtter til polynomer med heltallskoeffisienter

I videregående skole håndterer man med få unntak kun polynomer med reele heltallskoeffisienter. Disse polynomene kan ha reele og komplekse røtter, og de reele røttene kan være både rasjonelle og irrasjonelle. Det neste resultatet vi skal se på, sier noe om de rasjonelle kandidatene til røtter av et slikt polynom.

Setning 4
La f(x) være en polynom med heltallskoeffisienter: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^(n-1) + ... + a_o$. Hvis $x_r = p/q$ er en rasjonell rot til f slik at p og q er heltall med ingen felles faktorer, så må $p|a_o$ og $q|a_n$.

Bevis:
$a_n(p/q)^n + a_{n-1}(p/q)^(n-1) + ... + a_o = 0$
$\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^(n-1)q + ... + a_o q^n = o$
$\Rightarrow p(a_n p^(n-1)) + a_{n-1}p^(n-2)q + ...a_1) = -a_o q$
$\Rightarrow p|a_o$, siden a_i er heltall for alle i, og p og q ikke noen felles faktorer.

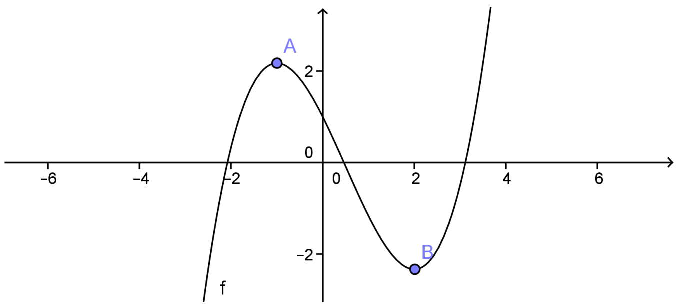
$a_n(p/q)^n + a_{n-1}(p/q)^(n-1) + ... + a_o = 0$
$\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^(n-1)q + ... + a_o q^n = 0$
$\Rightarrow q(a_{n-1}p^(n-1) + ... + a_o q^(n-1)) = -a_n p^n$
$\Rightarrow q|a_n$, siden a_i er heltall for alle i, og p og q ikke noen felles faktorer.

Setningen legger altså restriksjoner på hva slags kandidater det finnes når det gjelder rasjonelle røtter av et polynom med heltallskoeffisienter. Polynomet $-3x^2 + 2x + 5$ har dermed følgende kandidater til rasjonelle røtter $1, 1/3, 5, 5/3$. Fortegnet til de rasjonale kandidatene kan være både positivt og negativt. Ved å prøve og feile litt med disse alternativene, kan man se at røttene er -1 og $\frac{5}{3}$. Siden dette er et andregradspolynom, vet vi også at vi har funnet alle røttene til polynomet.

Konsekvens: $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall
Bevis
La $f(x) = x^2 - 2$, altså et polynom med reele heltallskoeffisienter. Enhver kandidat til en rasjonell rot $\frac{p}{q}$ må være slik at p deler 2 og q deler 1. Kandidatene blir dermed ± 2. Siden ingen av dem fungerer, må $\sqrt{2}$ være et irrasjonalt tall.

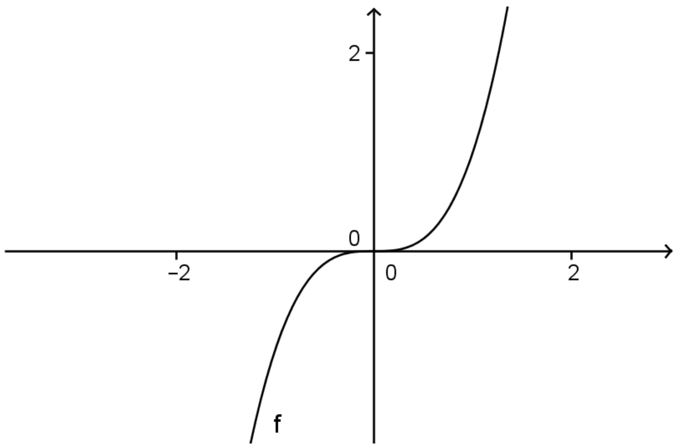
6 Ekstremalpunkter

Toppunkter og bunnpunkter til funksjoner kaller man ekstremalpunkter. Andrekoordinaten til et toppunkt er lokalt en maksimalverdi til funksjonen og andrekoordinaten til et bunnpunkt er lokalt en minimalverdi. Polynomer av høyere grad kan dermed ha ha flere topp- eller bunnpunkter.



Generelt bruker vi derivasjon når vi skal finne ekstremalpunkter. Ser vi på funksjonen over, er det klart at funksjonsverdiene blir større frem til punktet A, for deretter og minke (motsatt ved punktet B). I punktet A er tangenten horisontal, det vil si at funksjonen verken vokser eller avtar. Altså har vi at dersom f'(x) skifter fortegn i et punkt, så har vi et ekstremalpunkt.

Det er verdt å merke seg at betingelsen f'(s) = 0 er nødvendig for at vi skal kunne ha en ekstremalverdi i punktet (s, f(s)), men ikke tilstrekkelig. Et moteksempel er $f(x) = x^3$. I dette tilfellet har vi at $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, men $(0, f(0)) = (0, 0)$ er et det vi kaller et terrasepunkt:



Å finne ekstremalpunkter er en sentral oppgave i matematikken på videregående. Når det er snakk om andregradsuttrykk f(x), er dette spesielt enkelt. Ettersom et andregradsuttrykk har nøyaktig ett ekstremalpunkt og dette punktet ikke kan være et terassepunkt, er det tilstrekkelig å sette $f'(x) = 0$ når vi skal finne ekstremalpunktet for et andregradsuttrykk. Vi så ovenfor hvordan vi kunne finne dette ekstremalpunktet: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -b/2a$

7 Descartes' regel om positive røtter

Gitt et et polynom $f(x)$ med reele koeffisienter, skrevet slik at monomene er ordnet fra høyest til lavest grad fra venstre til høyre - altså på formen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Da er antall positive reele røtter (talt med multiplisitet) enten mindre eller lik antall fortegnsskift i polynomet. Dersom det er færre røtter enn fortegnsskift, så er differansen et partall.

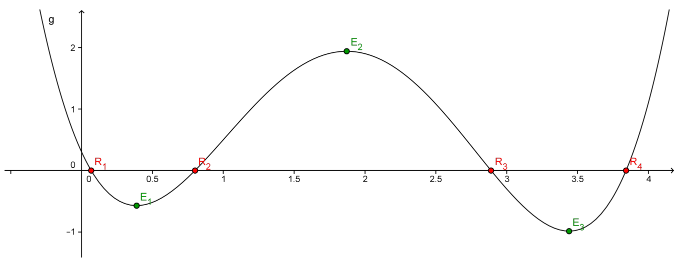
Regelen sier altså noe om antallet positive røtter til et slikt polynom. For å få enda mer informasjon om røttene, kan vi gjøre et lite grep, som forteller oss noe om hvor mange negative reele røtter polynomet har. Antallet negative røtter til polynomet $f(x)$ er jo lik antallet positive røtter til $f(-x)$, og dette antallet kan vi finne ved Descartes' regel.

Eksempel
$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, har to fortegnsskift $(++, +-, -+)$, og har dermed 2 eller 0 positive røtter.
$f(-x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$, har 1 fortegnsskift $(-+, ++, ++)$, og har dermed nøyaktig 1 positiv rot $\Rightarrow$ f(x) har nøyaktig 1 negativ rot.
Polynomet kan faktoriseres som $(x-1)^2(x+3)$, altså er det 2 positive røtter (talt med multiplisitet) og 1 negativ rot.

I denne oppgaven tar vi ikke med et utførlig bevis for Descartes' setning da dette vil være for plasskrevende. Vi tar i det følgende imidlertid med en intuitiv forklaring på hvorfor setningen holder, og deretter et bevis for setningen. Til slutt ser vi også på et bevis for setningen for førstegradspolynomer og andregradspolynomer.

Gitt et generelt polynom på formen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Det er et kjent faktum at når x går mot uendelig i et slik n-te grads polynom, så vil koeffisienten i monomet med den høyeste eksponenten (a_n) dominere (være bestemmende for funksjonsverdien). På samme måte så vil monomet med den laveste eksponenten (a_0) dominere når x går mot 0. Etterhvert som vi beveger oss utover på x-aksen fra $x = 0$ (mot høyre eller venstre), så vil de monomene med stadig høyere eksponenter dominere.

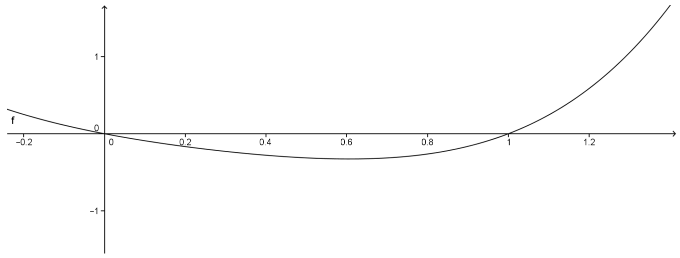
La oss for eksempel anta at $a_0 > 0$, og at vi ser på hva som skjer med funksjonsverdiene til $f(x)$ når vi flytter oss bortover x-aksen mot høyre – altså i positiv retning. I punktet $x = 0$ vil $f(x) = a_0 > 0$. Etterhvert vil koeffisienten a_1 dominere, og om denne er negativ – så vil funksjonsverdiene kunne bli negative. Dersom dette er tilfellet så får vi en positiv rot, ettersom polynomer er kontinuerlige funksjoner. Dette forklarer hvorfor vi kan ha like mange positive røtter som fortegnsskift. Det som kan forhindre at vi får en positiv rot, er at koeffiesienten a_2, er positiv - og begynner å dominere før grafen har rukket å krysse x-aksen. Uten nok et fortegnsskift - for eksempel fra koeffisienten a_2 til a_3, så vil grafen åpenbart bare fortsette sin positive ferd. Dette forklarer hvorfor vi kan ha en differanse mellom antall positive røtter og fortegnsskift på formen 2n.



Ovenfor ser vi funksjonen $g(x) = 0.5x^4 - 3.8x^3 + 8.5x^2 - 5x + 0.3$. Som vi ser har funksjonen 4 fortegnsskift og 4 positive røtter. I dette tilfellet får altså hvert monom dominere lenge nok til at vi får en skjæring med y-aksen.

Når $x = 0$, så er er $f(x) = f(0) = 3$. Nære $x = 0$ dominerer konstantleddet og sørger for at funksjonsverdiene er positive. Førstgradsmonomet $-5x$ er neste dominerende koeffisient og grafen krysser x-aksen i punktet R_1. Deretter blir andregradsmonomet $+8,5x^2$ stadig mer dominerende og grafen snur i ekstremalpunktet E_1. Denne positive dominanse gjør at vi får nok en rot i punktet $R2$. Deretter ser vi hvordan tredjegradsmonomet og fjerdegradsmonomet sørger for røttene $R3$ og $R4$.

Merk at størrelsen på koeffisientene til de ulike monomene ikke kan velges tilfeldig dersom vi ønsker å få like mange positive røtter som fortegnsskift. Koeffisientene må på en måte vektes i forhold til monomets grad. Tenk for eksempel på polynomet $g(x) = -x + x^2 - x^3 + x^4$. Her er det klart at for $x > 1$ så vil fjerdegradsleddet være dominerende. For $0 < x < 1$ så vil førstegradsmonomet være dominerende. Ikke overraskende vil grafen derfor være negativ for $0 < x < 1$, og positiv for $x > 1$. Andregradsmonomet og tredjegradsmonomet dominere ikke lenge nok til at disse sørger for noen røtter. Dersom vi endrer konstantleddet til et polynom vil hele grafen translanteres oppover eller nedover i koordinatsystemet. $g(x)$ er tegnet nedenfor.



7.1 Bevis for Descartes' setning for førstegrads- og andregradspolynom

Når det gjelder førstegradspolynomer, er setningens gyldighet relativt åpenbar. Gitt $f(x) = ax + b$. Det er klart at f(x) har en positiv rot hvis og bare hvis det forekommer et fortegnsskift mellom koeffisientene a og b.

Gitt et generelt andregradspolynom $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Vi ønsker å vise at antall fortegnsskift = antall positive røtter - 2n, der $n \geq 0$. Observer først at vi kan skrive $f(x) = x^2 + bx + c$, der b =B/a og c = C/A. De ulike skrivemåtene for f(x) deler antall fortegnsendringer mellom påfølgende koeffisienter. Videre vet vi fra Vietas formler at $b = -(x_0 + x_1)$ og $c = x_0 x_1$, der x_i er røttene til f(x). Nå gjenstår å sjekke om descartes setnings holder i de ulike tilfellen som finnes av antall fortegnsskift - altså 0, 1 eller 2.

Antall fortegnsskift = 2 $\Leftrightarrow$ $f(x) = x^2 - bx + c$ (hvis f(x) er skrevet på formen nevnt ovenfor er dette eneste mulighet som har 2 fortegnsskift). Det er også klart at f(x) kan skrives på denne formen og samtidig tilfredsstille relasjonene fra Vietas formler hvis og bare hvis røttene er på følgende form:

Alternativ 1: røttene x_0, x_1 er begge positive og reele fordi de må tilfredsstille $b = -(x_0 + x_1) < 0$ og $c = x_0 x_1 > 0$. I dette tilfelle har vi altså 2 positive røtter.
Altenativ 2: $x_0 = u + iv, x_1 = u - iv$ der $u > 0$. Da får vi $b = -(u + iv + u - iv) < 0)$og $c = u^2 + v^2 > 0$. I dette tilfette får vi dermed 2 - 2 = 0 positive

røtter. Oppsummert kan vi si at vi får 0 eller 2 positive røtter hvis og bar hvis polynomet har 2 fortegnsskift.

Antall fortegnsskift $= 0 \Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$. Alternativ 1: røttene x_0, x_1 er begge positive og reele. Alternativ 2: Røttene er komplekskonjugerte på formen $u \pm iv, u < 0$. Argumentene for dette er de samme som rett ovenfor. I begge tilfeller får vi altså null positive røtter hvis og bare hvis polynomet har null fortegnsskift.

Antall fortegnsskift $= 1$ hvis og bare hvis f(x) kan skrives som $ax^2 + bx - c$, eller $ax^2 - bx - c$. I begge tilfellene er c negativ, noe som ekvivalent med at røttene x_0 og x_1 har ulikt fortegn og er reele. For dersom røttene var komplekskonjugerte, så måtte c vært positiv. Og dersom røttene hadde likt fortegn, så ville c vært positiv. Altså får vi nøyaktig en positiv rot hvis og bare hvis polynomet har et fortegnsskift.

8 Referanser

Onstad, Torgeir (1994). Fra Babel til Abel. NKS-forlaget.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., Hals, S.; Sinus matematikk 1T Cappelen Damm AS (2009)

http://en.wikipedia.org/wiki/Descartes%27_rule_of_signs

http://no.wikipedia.org/wiki/Andregradsligning

http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_root_theorem

http://no.wikipedia.org/wiki/Algebraens_fundamentalteorem