Litt romgeometri

av

Andreas Marker

Mat4010

Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo

Vår 2015

Innhold

1 To metoder å “gange” vektorer i $\mathbb{R}^3$ på

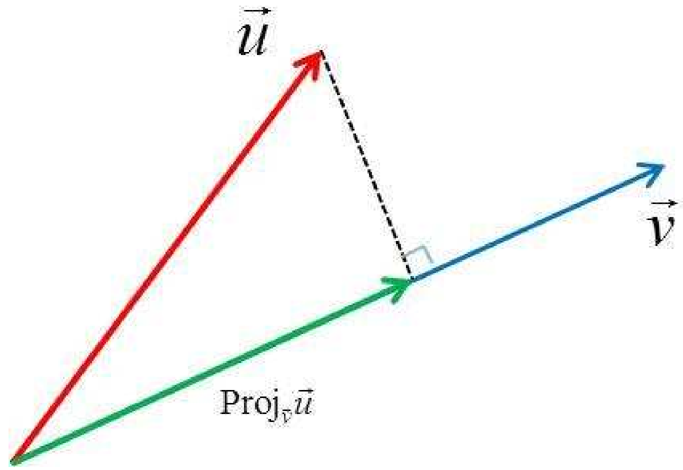
1.1 Skalar-, prikk-, og indreprodukt

Dette er bare forskjellige navn for det samme i $\mathbb{R}^3$, jeg kommer til å bruke indreprodukt. Indreproduktet i $\mathbb{R}^3$ er definert på helt lik linje som i $\mathbb{R}^2$. Altså for to vektorer $u, v \in \mathbb{R}^3$ definerer vi indreproduktet$(\cdot)$ på $\mathbb{R}^3$, som

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha$$

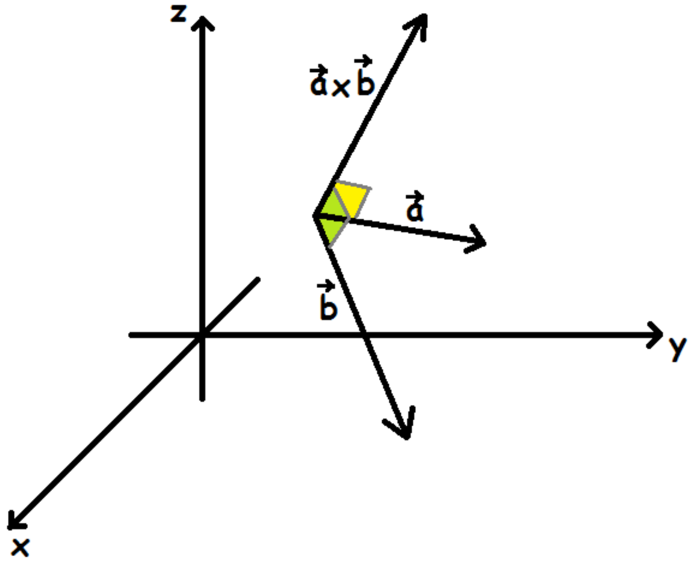
Observer at

$i)$ Geometrisk er indreproduktet projiseringen av u ned på $\frac{v}{|v|}$ eller motsatt.



$ii)$ $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

1.2 Kryssprodukt



I tillegg til skalarproduktet for vektorer, har vi noe vi kaller kryss- eller vektorprodukt. Det defineres for $u, v \in \mathbb{R}^3$, som følgende

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= i \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= i(u_2v_3 - u_3v_2) - j(u_1v_3 - u_3v_1) + k(u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= [(u_2v_3 - u_3v_2), (u_3v_1 - u_1v_3), (u_1v_2 - u_2v_1)] \\ &= w \end{aligned}$$

Sett prøve for å sjekke at fks $(u + v) \cdot w = 0$. Observer at:

i) w står alltid normalt på både u og v. Faktisk på hele planet som er utspendt av u og v.

ii) $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin(\alpha)$, der α er vinkelen mellom u og v.

iii) $u \times v = -v \times u$.

iv) $u \| v \Leftrightarrow u \times v = O$

2 Avstander fra et punkt til andre punkter, linjer og plan i rommet $\mathbb{R}^3$

I denne underseksjonen ønsker vi å diskutere forskjellige metoder for å finne avstanden fra et punkt til andre punkter, linjer og plan i rommet.

2.1 Avstanden mellom to punkter i $\mathbb{R}^3$

Gitt to punkter $P, Q \in \mathbb{R}^3$ kan vi definere vektoren $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{R}^3$ og avstanden $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$, er gitt ved:

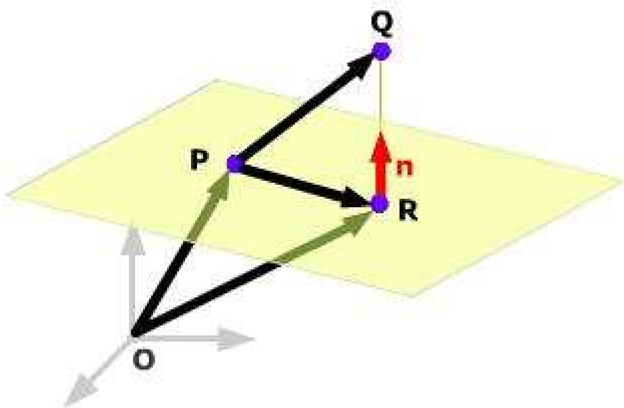
$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

2.2 Avstanden fra et punkt til et plan i $\mathbb{R}^3$

Planet kan være gitt på to måter nemlig som en vektorlikning med noemalvektor $\vec{n}$ eller på kartesiske kordinater.

2.2.1 Planet Γ gitt på vektorkordinater

La $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ være et plan, med normalvektor $\vec{n}$, og P et punkt på Γ. La $Q \notin \Gamma$, være et punkt. La videre R være punktet på Γ som ligger på normalen gjennom Q Da er avstanden $d : \Gamma \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ gitt ved



$$d(\Gamma, Q) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Ide: her er naturlig å bruke normalvektoren $\vec{n}$ til planet Γ, for så å projisere $\overrightarrow{QP}$ på normaliseringen av normalvektoren, m.a.o. Projiseringen av $\overrightarrow{QP}$ på $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

Bevis. La α være vinkelen mellom $\overrightarrow{QP}$ og $\vec{n}$. Da er

$$\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{QP}||\vec{n}| \cos\alpha \tag{1}$$

Observer

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} \cdot n = 0$$

De to tilfellene $\alpha < \frac{\pi}{2}$, og $\alpha > \frac{\pi}{2}$ må sees på separat.

i) $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Fra trekanttrigometrien har vi

$$d(\Gamma, Q) = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{QP}| \cos\alpha$$

Setter vi inn $d(\Gamma, Q)$ for $|\overrightarrow{QP}| \cos(\alpha)$ i 1 får vi:

$$d(\Gamma, Q) = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \tag{2}$$

ii) $\alpha > \frac{\pi}{2}$

$$d(\Gamma, Q) = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{QP}| \cos(\pi - \alpha) = |\overrightarrow{QP}|\big(-\cos(\alpha)\big) = -|\overrightarrow{QP}| \cos(\alpha)$$

Erstatter vi $|\overrightarrow{QP}| \cos(\alpha)$ med $-d(\Gamma, Q)$ i 1 får vi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} &= -d(\Gamma, Q) \cdot \vec{n} \\ d(\Gamma, Q) &= -\frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \end{aligned} \tag{3}$$

Utrykkene i 2 og 3 kan vi skrive som

$$d(\Gamma, Q) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

□

2.2.2 Planet Γ gitt på kartesiske kordinater

Gitt et plan $\Gamma = ax + by + cz + d = 0$ og et punkt $Q = (x_1, y_1, z_1) \notin \Gamma$ er avstanden $d(\Gamma, Q)$ fra Q til Γ gitt ved

$$d(\Gamma, Q) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4}$$

Bevis. La først $P = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ være et tilfeldig punkt (se figuren i 2.2.1). Videre er den naturlige normalvektren her (a, b, c) og vi bruker det vi fant i 2.2.1, altså:

$$\begin{aligned} d(\Gamma, Q) &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{|(a, b, c)|} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - \overbrace{(ax_0 + by_0 + cz_0)}^{=-d}|}{|(a, b, c)|} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

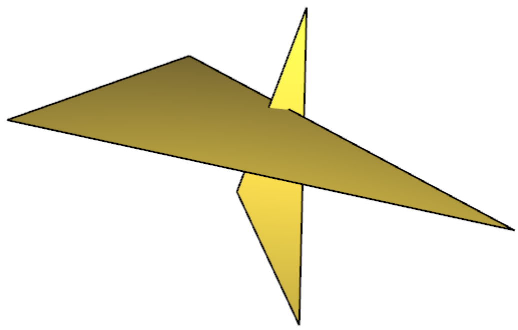
$\square$

2.3 Avstanden fra punkt til linje i $\mathbb{R}^3$

Gitt en linje $\mathcal{L} := l(t) = Q + t\vec{v}$ der Q er et punkt og $\vec{v}$ er en vektor, er avstanden fra $P \notin \mathcal{L}$ til $\mathcal{L}$ gitt ved:

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Ide: Her har vi ingen normalvektor, hvordan forsetter vi da?
I dette tilfelle bruker vi at arelaet av en trekant, kan skrives på to forskjellige måter. Nemlig som en vektorlikning, som involverer krysspofuktet mellom to vektorer. Og som lengde gannger høyde i trekanten vår utspent av to vektorer. Vi er interessert i høyden $h = d(P, \mathcal{L})$. Husk at alle trekanter i



rommet ligger i et plan.

Bevis. La R være punktet på linja slik at $\overrightarrow{QR} = \vec{v}$. Da vet vi at ΔPQR har areal

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} \right|$$

Vi vet også at ΔPQR har areal

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right| \cdot h$$

der h er høyden i ΔPQR. Observer at $d(P, \mathcal{L}) = h$, slik at

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right| \cdot h = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right| \cdot d(P, \mathcal{L}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right|$$

Dermed er

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{L}) &= \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$

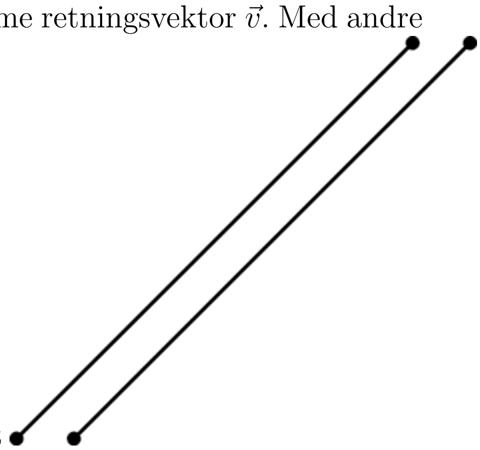
□

3 Avstanden mellom linjer i rommet

For to linjer l og m i rommet, definerer vi avstanden mellom l og m som den minste avstanden mellom to punkter på linjene.
For to linjer som skjerer hverandre er avstanden 0.
Det er to andre måter linjer kan forholde sef til hverandre i rommet på, nemilg de er paralelle, eller de er vindskeive.

3.1 Avstanden mellom to paralelle linjer i rommet

Hvis to linjerer l og m er paralelle har de samme retningsvektor $\vec{v}$. Med andre



ord finnes det s og t, og punkter P og Q, slik at

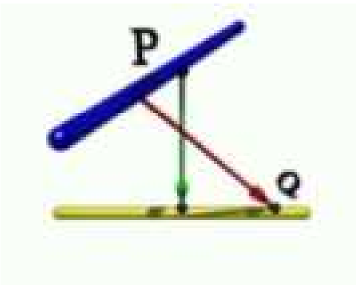
1. $l = P + s\vec{v}$

2. $m = Q + t\vec{v}$

Siden linjene l og m er paralelle, vet vi at avstanden er lik uansett hvor på linja vi befinner oss. Vi kan med andre ord bare velge oss et punkt på den ene linja. Det naturlige valget her er fks. $Q \in m$(eller $P \in l$), og se på avstanden fra punktet ned på linja l. Altså det samme som vi gjorde i avstanden mellom linje og punkt i rommet i 2.3, altså.

$$d(l, m) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

3.2 Avstanden mellom to vindskeive linjer i $\mathbb{R}^3$



Avstanden mellom to vindskeive linjer er lengden av en vektor som står normalt på begge linjene.
Med andre ord, la l og m være to linjer med retningsvektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
Linjen l går gjennom punkte P og m går gjennom Q, slik at linjene l og m har parameterfremstilling:

1. $l = P + s\vec{u}$, $s \in \mathbb{R}$

2. $m = Q + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

Hypotese: Hvis l og m er to vindskeive linjer, må det eksistere to paralelle plan $\mathcal{L}$ og $\mathcal{M}$ slik at $l \subset \mathcal{L}$ og $m \subset \mathcal{M}$.

Bevis. Observer at:

1. $\mathcal{L}' = P + s\vec{u} + t\vec{v}$ er et plan som inneholder l.

2. $\mathcal{M}' = Q + s\vec{u} + t\vec{v}$ er et plan som inneholder m.

Det er opplagt at disse planene er paralelle når $P \neq Q$. $\square$

La derfor $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ og $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$.
Vi vet at avstanden mellom $\mathcal{L}$ og $\mathcal{M}$ er det samme som å velge seg to punkter $P \in \mathcal{L}$ og $Q \in \mathcal{M}$ og se på

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{5}$$

der $\vec{n}$ er normalvektoren til både $\mathcal{L}$ og $\mathcal{M}$(siden planene er paralelle vet vi at en slik vektor eksisterer).
Observer at retningsvektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ lever i origo, dermed gir det mening snakke om $\vec{u} \times \vec{v}$, som også er en kandidat til en normalvektor for planene $\mathcal{L}$ og $\mathcal{M}$. Fra 5 har vi da at

$$d\big(\mathcal{L}, \mathcal{M}\big) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = d(l, m)$$

Vi kan anta at $P \in l$ og $Q \in m$. Dermed trenger vi ikke å vite noe om planene $\mathcal{L}$ og $\mathcal{M}$, annet enn at de eksisterer og er paralelle.