Prosjektoppgave i MAT4010 vår 2015

Sannsynlighet i kortspill

Av:
Paul Høglend
Mats Myhr Hansen

13. mai 2015

Sannsynlighet i 7-kortpoker

I denne presentasjonen av sannsynlighetene for hendene i 7-kortpoker, tar vi utgangspunktet i at syv kort ligger åpent for alle. I poker brukes en kortstokk med 52 kort, som har fire forskjellige farger. Det er fem kort som utgjør en hånd.

Rangeringen av hendene i poker er som følger:

Straight flush: fem kort i samme farge og stigende rekkefølge

Fire like: alle fire kortene av en verdi

Fullt hus: tre like og et par

Flush: fem kort i samme farge

Straight: fem kort i stigende rekkefølge

Tre like: tre like kort av en verdi

To par: to par

Et par: et par

High card: fem kort hvor høyeste verdi teller

Sannsynligheten for en hånd er: $\frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}}$. Antall måter å velge ut syv kort av 52 kort på er: $\binom{52}{7} = 133\,784\,560$. Sannsynlighetene er gitt i følgende tabell:

Sannsynnligheter for pokerhender	
Straight flush	0.000311
Fire like	0.00168
Fullt hus	0.026
Flush	0.0303
Straight	0.0462
Tre like	0.0483
To par	0.235
Et par	0.438
High card	0.174

Kombinatorikk i 7-kortpoker

Straight flush: Det er ti forskjellige straight flush. Den laveste har 5 som siste kort, den høyeste ess. De to overflødige kortene kan velges fritt fra de resterende 47 kortene hvis straight flushen er Ess-høy. For de ni resterende straight flushene må man ta bort kortet som gjør straight flushen bedre. I tillegg kan hver straight flush velges i fire forskjellige farger.
Antall måter å velge straight flush på blir dermed:

$$\binom{4}{1}\left[\binom{47}{2}+\binom{9}{1}\binom{46}{2}\right]=41\,584$$

Fire like: Det er 13 verdier å velge mellom. Når man har valgt verdi har man samtidig valgt ut de fire like. De resterende tre kortene kan velges fritt blant de 48 gjenværende kortene. Antall måter å velge fire like på blir dermed:

$$\binom{13}{1}\binom{48}{3}=224\,848$$

Fullt hus: Fullt hus kan fås på tre forskjellige måter:

1. en trippel, et par og to kickere (En kicker er et enkelt kort.)
2. en trippel og to par
3. to tripler og en kicker

Kombinatorikken for variant 1 : Det er 13 mulige verdier for trippelen. Man skal velge tre av fire farger i den verdien. For paret er det da tolv mulige verdier igjen, hvor man skal velge to av fire farger i den verdien. For kickerne er det elleve mulige verdier og man skal velge to. For hvert kort kan en av fire farger velges. Antall måter å velge variant 1 på blir dermed:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}\binom{11}{2}\binom{4}{1}^2=3\,294\,720$$

Kombinatorikken for variant 2 : Det er igjen 13 mulige verdier for trippelen og fargevalget foregår på samme mmåte. Det er nå tolv mulige verdier for parene og to av fire farger skal velges i de respektive verdiene. Antall måter å velge variant 2 på blir dermed:

$$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{2}^2=123\,552$$

Kombinatorikken for variant 3 : Det er 13 mulige verdier for de to triplene. Man skal velge tre av fire farger i de respektive verdiene. For kickerne er det elleve mulige verdier og man skal velge en. Man skal velge en av fire farger for denne. Antall måter å velge variant 3 på blir dermed:

$$\binom{13}{2}\binom{4}{3}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}=54\,912$$

Det totale antall måter å få fullt hus på:

$$3\,294\,720+123\,552+54\,912=3\,473\,184$$

Flush: Flush kan fås med fem, seks eller syv kort. Når det er 5- eller 6-kort flush må de overflødige kortene velges fra de andre fargene. Det er fire farger man kan få flush i. Samtidig kunne man fått straight flush, så antall måter å få straight flush på må trekkes fra. Antall måter å få flush på blir dermed:

$$\binom{4}{1}\left[\binom{13}{5}\binom{39}{2}+\binom{13}{6}\binom{39}{1}+\binom{13}{7}\right]-\binom{4}{1}\left[\binom{47}{2}+\binom{9}{1}\binom{46}{2}\right]=4\,047\,644$$

Straight: I likhet med fullt hus kan også straight fås på flere forskjellige måter. De forskjellige måtene er følgende:

1. syv distinkte verdier
2. seks distinkte verdier
3. fem distinkte verdier med en trippel
4. fem distinkte verdier med to par

Kombinatorikken for variant 1 : Det er ti forskjellige straight. For Ess-høy straight kan de to overflødige kortene kan velges fritt fra de åtte verdiene som er igjen. For de ni resterende kan de to overflødige kortene velges fra alle verdiene, utenom den som gjør straighten bedre.
For hvert kort er det fire forsjellige farger å velge blant. Siden flush er bedre enn straight, må mulighetene for å få flush trekkes fra. Det er fire farger å velge mellom når man skal få en flush. Man kan få flush med fem, seks eller syv kort. For 5 - og 6-kort flush må fargen til ekstra kortene velges fra de tre andre fargene enn den det dannes en flush med. Antall måter å velge variant 1 på blir dermed:

$$\left(\binom{8}{2}+\binom{9}{1}\binom{7}{2}\right)\left(\binom{4}{1}^7-\binom{4}{1}\left[1+\binom{7}{6}\binom{3}{1}+\binom{7}{5}\binom{3}{1}^2\right]\right)=3\,372\,180$$

Kombinatorikken for variant 2 : Akkurat som for variant 1 er det ti forskjellige straight. Det syvende kortet danner et par. Man velger ut verdien til paret fra en av de seks foregående valgte. I tillegg skal fargene til paret velges. Det er fire mulige valg av farger for hvert tellende kort. I likhet med varianten med seks ulike verdier må antall måter å få flush på trekkes fra. Flush kan fås ved at alle de tellende kortene har samme farge eller fire av fem tellende har samme farge og den fargen forekommer i paret. Man har tre fargevalg for flush, hvor en av parfargene avgjør flushen. Antall måter å velge variant 2 på blir dermed:

$$\left(\binom{8}{1}+\binom{9}{1}\binom{7}{1}\right)\left(\binom{6}{1}\binom{4}{2}\right)\left(\binom{4}{1}^5-\left(\binom{4}{1}+\binom{5}{4}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\right)\right)=2\,530\,440$$

Kombinatorikken for variant 3 : Akkurat som for variant 1 og 2 er det ti forskjellige straight. Verdien til trippelen velges fra de fem distinkte verdiene. I tillegg skal det velges tre av fire i denne verdien. Hvert av de fire øvrige kortene er det fire mulige fargevalg. De måtene man kan få flush på må trekkes fra. Man får flush hvis alle fire kortene som ikke inngår i trippel har samme farge og den fargen forekommer i trippelen. Antall måter å velge variant 3 på blir derme:

$$10\left(\binom{5}{1}\binom{4}{3}\right)\left(\binom{4}{1}^4-\binom{3}{1}\right)=50\,600$$

Kombinatorikken for variant 4 : Her er det også ti forskjellige straight. Verdiene til parene velges fra de fem distinkte verdiene. For hvert par skal det velges to av fire i den verdien. Det er 36 måter å velge fargene i parene. Det man passe på i denne varianten er hvor mange farger parene har når antall måter å få flush skal trekkes fra fargekombinasjoner som gir straight. Det kan være to, tre eller fire farger. Det er seks måter å ha to farger i parene. Det 30 måter å ha tre farger i parene. I tillegg er det seks måter å ha fire farger i parene. For de kortene som ikke inngår i parene er det 64 måter å velge farge på. For to farger i parene kan flush forekomme på to måter. For tre farger i parene er det en måte å få flush på. For fire farger i parene er det ingen måte å få flush på. Antall måter å velge variant 4 på blir dermed:

$$10\left(\binom{5}{2}\right)\left(6\cdot\left[\binom{4}{1}^3-\binom{2}{1}\right]+24\left(\binom{4}{1}^3-1\right)+6\cdot\binom{4}{1}^3\right)=226\,800$$

Det totale antall måter å få straight på:
3 372 180 + 2 530 440 + 50 600 + 226 800 = 6 180 020
Tre Like: Når vi skal ha tre like, må vi ha forskjellige fem verdier, men de ti straight må trekkes fra. Man velger verdien til trippelen og det skal velges tre av fire i den verdien. For hvert av de fire resterende kortene kan fargen velges fritt, men måter å få flush på trekkes fra. Man får flush hvis de fire overflødige kortene er i samme farge og den forekommer i trippelen. Antall måter å velge variant tre like på blir dermed:

$$\left(\binom{13}{5}-10\right)\left(\binom{5}{1}\binom{4}{3}\right)\left(\binom{4}{1}^4-\binom{3}{1}\right)=6\,461\,620$$

To par: To par kan fås på to forskjellige måter:

1. tre par og en kickere
2. to par og tre kickere

Kombinatorikken for variant 1 : Det er fire verdier å velge ut. Tre av disse velges for verdiene til parene. For hvert par skal to av fire i den gitte verdien velges. Fargen til kickeren velges fritt. Antall måter å velge variant 1 på blir dermed:

$$\binom{13}{4}\binom{4}{3}\binom{4}{2}^3\binom{4}{1}=2\,471\,040$$

Kombinatorikken for variant 2 : Det er fem verdier å velge ut, men antall straight må trekkes fra. Så velges verdien til parene ut. Fargekombinasjonen som gir hånda framkommer på samme måte som for straight med fem distinkte verdier og to par. Antall måter å velge variant 2 på blir dermed:

$$\left[\tbinom{13}{5}-10\right]\tbinom{5}{2}\left(6\left[\tbinom{4}{1}^3-\tbinom{2}{1}\right]+24\left(\tbinom{4}{1}^3-1\right)+6\tbinom{4}{1}^3\right)=28\,962\,360$$

Det totale antall måter å få to par på: 2 471 040 + 28 962 360 = 31 433 400.
Et par: Det er seks verdier som skal velges ut, men mulige 5- og 6-kort straight må trekkes fra. Det er ni 6-kort straight. Det er ti 5-kort straight. For 5-høy og Ess-høy straightene kan det siste kort velges fra de resterende verdiene minus en nabo. For de åtte resterende straightene er det alle resterende verdier minus to naboer. Fargekombinasjoner som gir hånda er akkurat som straight med 6 distinke verdier. Selve paret velges ut ved at man velger en verdi og to farger i den verdien. Antall måter å få et par på blir dermed:

$$\left(\tbinom{13}{6}-9-\left[2\tbinom{7}{1}+7\tbinom{6}{1}\right]\right)\left(\tbinom{4}{1}^5-\left(\tbinom{4}{1}+\tbinom{5}{4}\tbinom{2}{1}\tbinom{3}{1}\right)\right)\left(\tbinom{6}{1}\tbinom{4}{2}\right)=58\,627\,800$$

High card: Kombinatorikken er helt analog til hvordan kombinatorikken er for et par. Det skal velges syv distinkte verdier, men man må trekke fra 5-, 6- og 7-kortstraight. For 5- og 6-kort skiller man de de to tilfellene: høyeste og laveste straight og de øvrige, når man velger de overflødige kortene. Det kan ikke velges naboer til straightene. Fargekombinasjonene som gir hånda beregnes akkurat som for straight med syv distinkte verdier. Antall måter å få high card på blir dermed:

$$\left(\binom{13}{7} - 8 - \left[2\binom{6}{1} + 7\binom{5}{1}\right]\left[2\binom{7}{2} + 8\binom{6}{2}\right]\right)\left(\binom{4}{1}^7 - \binom{4}{1}\left[1 + \binom{7}{6}\binom{3}{1} + \binom{7}{5}\binom{3}{1}^2\right]\right) = 23\,294\,460$$

Grunnleggende bridgeregler

Bridge er et kortspill med fire spillere på to lag i hver runde, hvor målet er å samle flest poeng. Du har to vanlig varianter: duplikatbridge og bridge. Hver runde har spillerne 13 kort hver. Spillet forløper seg slik at alle spillerne legger et kort på bordet og det kortet med høyest verdi vinner og tar stikket. Spillet består av fire faser: utdeling av kort, melding, spilldel og poenggivning. Etter at kortene har blitt delt ut, begynner utdeler meldedelen. Man forsetter så med klokka til en endelig kontrakt er meldt. Det skjer når alle andre spillere har meldt pass.
I brigde skal man melde antall stikk melderen og en partner skal vinne. Man begynner på 1 og helt opp til 7. Antall stikk betegner hvor mange stikk mer en seks stikk man skal vinne. Alt over seks stikk gir flere stikk enn motstanderlaget siden det er 13 stikk totalt. I tillegg skal meldingen inneholde en benevnelse. En benevnelse er enten en farge eller no trumf. Hvis benevnelsen er en farge blir dette trumffargen. Dette betyr at kort i denne fargen, er bedre enn alle andre kort i andre farger. No trumf betyr, som navnet tilsier, at det ikke er noen trumffarge og høyeste verdi i utspilt farge vinner. Det er et fargehierarki i bridge. Rangeringen er: kløver, ruter, hjerter og spar. Når kontrakten er bestemt blir laget som vant melderunden nord og sør, mens motstanderne blir øst og vest. Spilledelen begynner med vest. Når vest har lagt et kort på bordet, legger nord alle kortene sine synlig på bordet. Så legger nord på et kort og man forsetter med klokka. Den med høyest verdi vinner stikket og spiller ut et nytt kort. Når en spiller skal legge på et kort, må spilleren følge farge. Etter at alle 13 stikkene er fordelt telles poengene opp og hele prosedyren begynner på nytt.

Prinsippet om begrenset valg

Det finnes flere interessante paradokser i bridge, vi har valgt å fokusere på et som kalles prinsippet om begrenset valg. Enkelt sagt går prinsippet ut på at det at en spiller spiller ut et gitt kort, minker sannsynligheten for at han sitter på et ekvivalent kort (et ekvivalent kort er et kort over eller under i samme farge, slik at spilleren har kontroll på alle kortene imellom). Dette blir kanskje best illustrert med et eksempel.

La oss tenke oss at sør sitter på 5, 4, 3 og 2 i spar (eller en annen farge), og nord (synlig for alle) har A, J, 10, 7 og 6 i spar. Da er de eneste ukjente kortene igjen i spar K, Q, 8 og 9 som på en eller annen måte er fordelt mellom øst og vest. Anta nå at sør spiller ut i spar, vest spiller en lav (8 eller 9), nord spiller knekten og at øst vinner med kongen. Så går det noen runder, og sør har igjen vunnet et stikk og skal begynne. Han spiller ut en spar, og vest legger igjen ut en lav spar (8 eller 9). Skal nord nå spille esset? Eller burde han spille 10-ern og håpe at dama ligger hos vest?

Sannsynligheten for at kongen ligger hos enten øst eller vest er nesten helt lik. Derfor skulle man kanskje tro at det å spille esset, i lengden ville være like profitabelt som det å spille 10-ern. Slik er det derimot ikke. Det å spille 10-ern vil være profitabelt i omtrent 2/3 av tilfellene. Hvorfor det? Jo, fordi hvis øst satt på både kongen og dama, så hadde han et valg. Et valg mellom å enten spille kongen (som han gjorde), eller å spille dama. Hvis han derimot bare satt på kongen, så kan det se ut som om han hadde et valg, mens han i realiteten ikke hadde et valg (eller et begrenset valg). Hvis vi nå antar at han spiller kongen og dronningen hver for seg like ofte om han sitter på begge, så vil bare halvparten av de tilfellene hvor øst satt på begge kortene komme til den situasjonen vi har nå. Hva om antagelsen vår om at han spiller kongen like ofte som dama om han har begge er feil da? Hva om han alltid spiller kongen når han har et valg? Da vil det være like lønnsomt å spille esset, som 10-ern fra blindehånden. På en annen side kan ikke øst bare gjøre dette da, så må nord allikevel gjette? Jo, det kan han, men skulle det derimot være dama som først ble lagt ut (og ikke kongen), kan nord være sikker på at kongen ikke befinner seg hos øst, og kan da trygt spille 10-ern.

Vest	Øst	Sannsynlighet
9-8	K-Q	6.8 %
Q-9-8	K	6.2 %

Det viser seg at sannsynligheten for at øst bare har kongen, eller kongen og dama ikke er helt like. Disse sannsynlighetene kan man regne ut, men det er ganske komplisert så det har ikke vi tenkt til å gjøre her. Fra tabellen kan man se at likevekten i denne problemstillingen vil være at øst spiller kongen omtrent 91% (6.2/6.8) av de gangene han har et valg mellom kongen og dronningen. Da vil det være like lønnsomt å spille esset, som 10-ern fra blindehånden. Dette prinsippet har klare paralleller til kjente sannsynlighetsparadokser som Monty Hall og Tobarnsproblemet.

Kilder

- Manley, Brent, Editor; Horton, Mark, Co-Editor; Greenberg-Yarbro, Tracey, Co-Editor; Rigal, Barry, Co-Editor (2011). *The Official Encyclopedia of Bridge* (7th ed.). Horn Lake, MS: American Contract Bridge League. ISBN 978-0-939460-99-1.

- Alspach, Brian; *7-Card Poker Hands*
  `http://people.math.sfu.ca/~alspach/comp20/`, (13. mai 2015)

- Pavlicek, Richard; *Bridge Paradoxes*
  `http://www.rpbridge.net/4b73.htm`, (13. mai 2015)