TRIGONOMETRI

KRISTIN LÅGEIDE OG THEA-KAROLINE NOMERSTAD

Abstract. Oppgaven tar for seg utvalgte temaer innenfor trigonometri, og retter seg mot lærere som skal undervise i fagene 1T og R2.

Date: May 7, 2015.

Contents

1. Innledning

Denne oppgaven tar for seg for trigonometri som er knyttet opp mot læreplanmålene i 1T og R2. Hensikten med oppgaven er å gi lærerne en bredere forståelse av temaet, og for å bidra til dette brukes beskrivende figurer til teksten. Dette er en sentral del av uttrykket i oppgaven. Først presenteres enhetssirkelen og definisjonene av cosinus, sinus og tangens. Videre beskrives sammenhengen mellom grader og radianer. Hovedfokuset i oppgaven er bruken av areal-, sinus- og cosinussetningen. Disse blir først bevist og deretter blir det sett på anvendelser i ulike situasjoner. Avslutningsvis ser vi på trigonometriske sammenhenger og harmoniske svingninger.

De læreplanmålene vi har tatt utgangspunkt i er følgene:

1T Geometri:

- *Gjere greie for definisjonane av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å berekne lengder, vinklar og areal i vilkårlege trekantar.*

- *Bruke geometri i planet til å analysere og løyse samansette teoretiske og praktiske problem med lengder, vinklar og areal.*

R2 Funksjoner:

- *Forenkle og løse lineære og kvadratiske likninger i trigonometriske uttrykk ved å bruke sammenhenger mellom de trigonometriske funksjonene.*

- *Omforme trigonometriske uttrykk av typen* $a \sin kx + b \cos kx$*, og bruke dem til å modellere periodiske fenomener.*

Oppgaven er som nevnt tidligere ment for lærere som skal undervise i dette temaet. Det er viktig at lærerne er bevisst på at elevene har tilegnet seg forkunnskaper som: Formlikhet, trekanter, supplementvinkler, komplementvinkler, vektorregning, pytagoras og areal.

2. Enhetssirkelen

2.1. Definisjoner av sinus, cosinus og tangens.

$$\text{sinus} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\text{cosinus} = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\text{tangens} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}$$

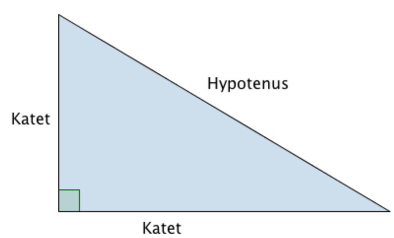


Figure 1. Rettvinklet trekant

Definisjonene gjelder kun for rettvinklede trekanter. Lenger ut i oppgaven vil vi vise hvordan vi bruker cosinus, sinus og tangens på vilkårlige trekanter.

2.2. 1. kvadrant.

Enhetssirkelen er en sirkel med radius lik 1. Sirkelen blir plassert i et koordinatsystem med sentrum i origo. Dermed ser vi at $Omkrets = 2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

$$\Rightarrow O = 2\pi$$

Først fokuserer vi på første kvadrant, som vist på figur 2. Det blir dannet en vinkel ved å tegne to vinkelbein, ut fra origo. Et vinkelbein ligger langs x-aksen og et krysser enhetssirkelen i et vilkårlig punkt, $P(x, y)$ på enhetssirkelen. Ved å stiple en vertikal linje fra punktet P til x-aksen og en linje fra punktet P til y-aksen, får vi en rettvinklet trekant (Se figur 2). Dermed brukes definisjonen fra punkt 2.1 til å finne cosinus og sinus.

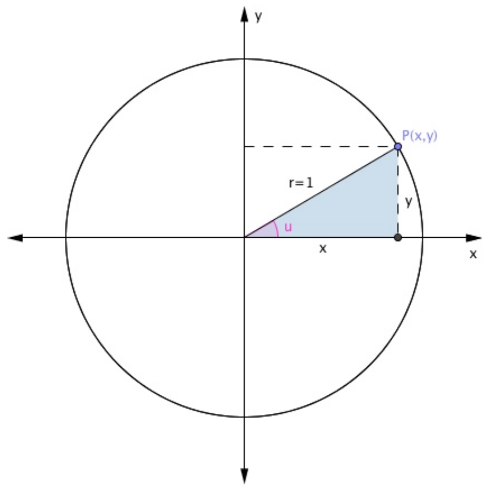


FIGURE 2. Enhetssirkelen

$$\sin u = \frac{mot\ kat}{hyp} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos u = \frac{hos\ kat}{hyp} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan u = \frac{mot\ kat}{hos\ kat} = \frac{y}{x} = \frac{\sin u}{\cos u}\ , \text{ når } \cos u \neq 0$$

Dermed ser vi at $\sin u = y$ og $cosu = x$. Dette fører til at $P(x, y) = (\cos u, \sin u)$.

2.3. **2. kvadrant.** Videre ser vi på andre kvadrant. Vi tar utgangspunkt i figur 2 og speiler vinkelbeinet om y-aksen, se figur 3.

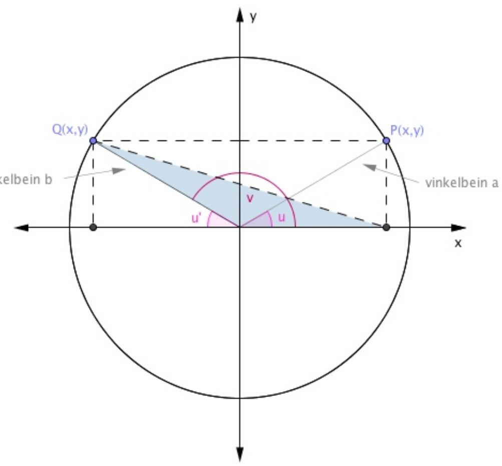


FIGURE 3. Andre kvadrant

Vinkelbein b er en speiling av vinkelbein a og vi ser at vinkelbein b krysser enhetssirkelen i punktet $Q(x, y) = (\cos u, \sin u)$. Videre ser vi at $\angle u$ og $\angle u'$ er supplementvinkler, og dermed er $\angle u = \angle u'$. Dette fører til at $\angle v = 180° - \angle u$, og $\angle v > 90°$ og vi har dermed en butt vinkel. På samme måte som i første kvadrant bruker vi definisjonene fra 2.1 til å finne cosinus og sinus.

$$\sin v = \sin(180° - u) = \sin u = y$$

$$\cos v = \cos(180° - u) = -\cos u = -x$$

$$\tan v = \frac{\sin u}{-\cos u} = \frac{y}{-x}, \text{ når } \cos u \neq 0$$

2.4. Forholdet mellom cos og sin første og andre kvadrant. Vi ser at *sin* verdien for P og Q er den samme, og *cos* verdien får negativt fortegn ved butt vinkel.

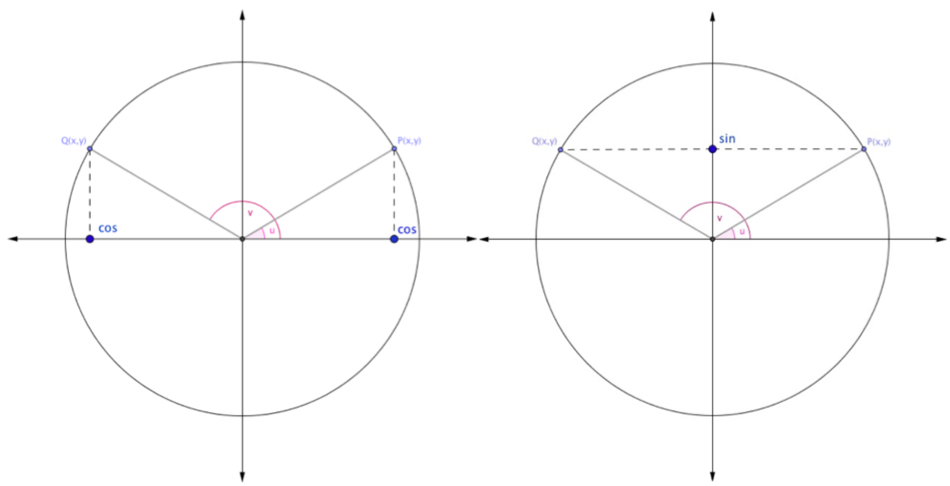


FIGURE 4. Her ser vi $P(x, y) = (\cos u, \sin u)$ og $Q(x, y) = (\cos v, \sin v) = (-\cos u, \sin u)$

Nå har vi snakket om trekanter i første og andre kvadrant. Disse speiles om x-aksen og danner tilsvarende trekanter i 3. og 4. kvadrant, se figur 5.

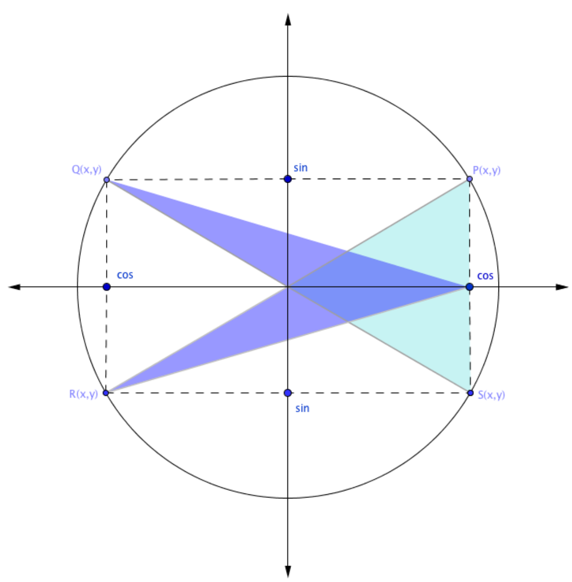


FIGURE 5

2.5. **Enhetsformelen.** Vi har en sammenheng mellom $\cos u$ og $\sin u$ som kalles enhetsformelen. Den ser slik ut

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

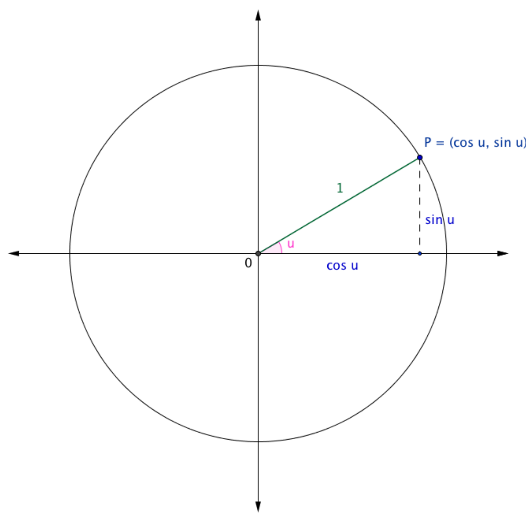


Figure 6

Ved pytagoras ser vi at dette må stemme, se figur 7.

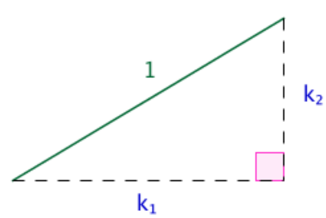


Figure 7

$$\begin{aligned} h^2 &= k_1^2 + k_2^2 \\ 1^2 &= \cos^2 u + \sin^2 u \end{aligned}$$

Altså har vi at $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$. Vi kan også vise dette ved hjelp av vektorregning, hvor vi ser at

$$\overrightarrow{OP} = [\cos u, \sin u]$$

$\overrightarrow{OP}$ er radius i sirkelen, og har da dermed lengen 1. Videre ser vi da at

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{(\cos v)^2 + (\sin v)^2} \\ 1 &= \sqrt{(\cos u)^2 + (\sin u)^2} \\ 1^2 &= (\cos v)^2 + (\sin v)^2 \\ 1 &= \cos^2 v + \sin^2 v \end{aligned}$$

Denne sammenhengen er spesielt sentral i beviset for cosinussetningen og addisjonssetnigene, som går gjennom senere i oppgaven.

2.6. **Omdreining.** Når vi snakker om enhetssirkelen er omdreiningsretningen mot klokka, se fig.8.

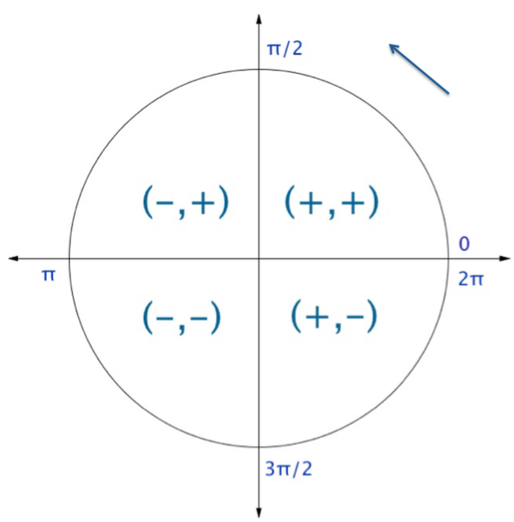


FIGURE 8

2.7. **Absolutt vinkelmål.** Radianer tilsvarer absolutt vinkelmål, som er forholdet mellom buelengden og radien.

Formelen blir da

$$v = \frac{b}{r},$$

hvor v er vinkelen målt i radianer, b er buelengden og r er radius.

Når vi snakker om enhetssirkelen er radien lik 1, altså er $v = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{1} = b$. Dermed er radien/absolutt vinkelmål det samme som buelengden, se figur 9.

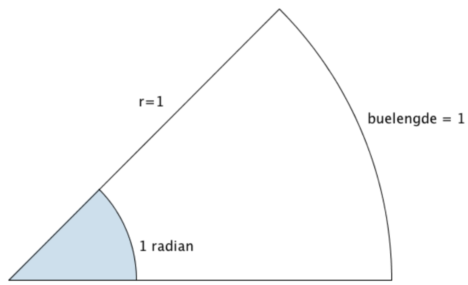


FIGURE 9. Absolutt vinkelmål

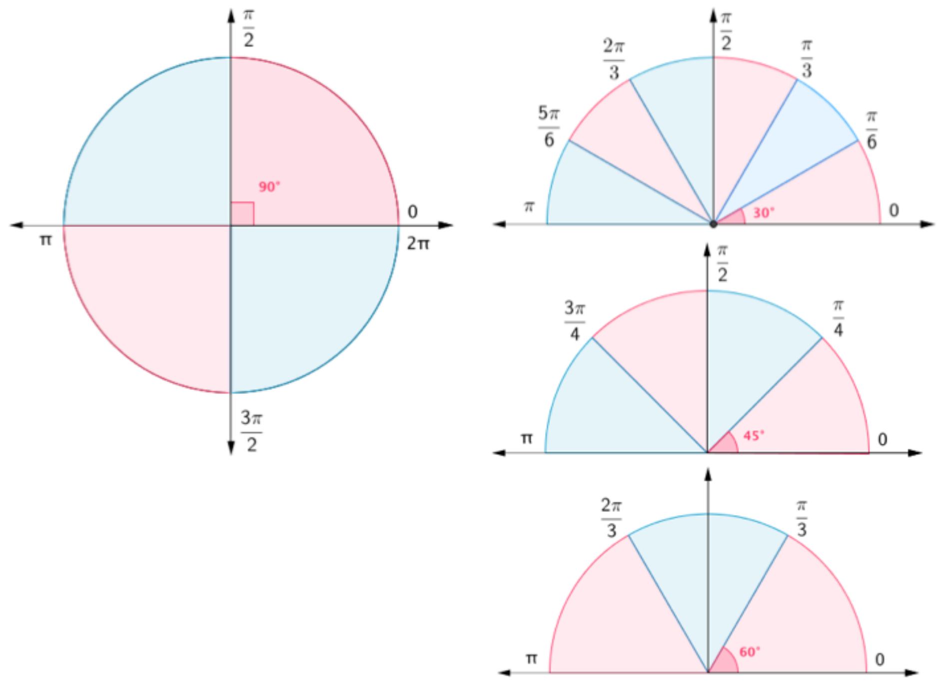
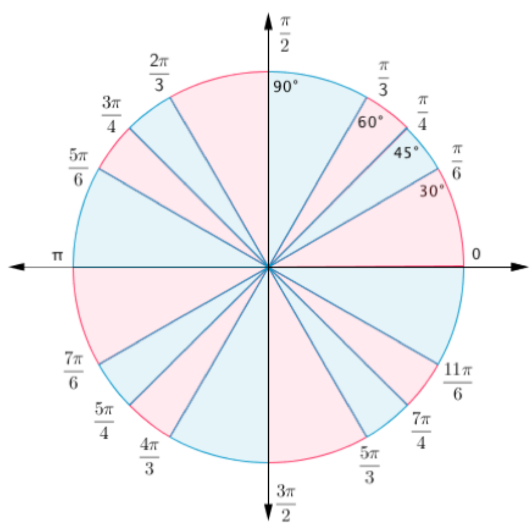


FIGURE 10. Forhold melom radianer og grader



$\angle v$	$\angle v$			
Grader	Radianer	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Ikke definert

FIGURE 11. Forhold melom radianer og grader

2.8. **Fra grader til radianer:** Vi vet nå at buelengden er det samme som radianer. Dermed ser vi at $180° = \pi$ rad og $360° = 2\pi$ rad. Se figur 12.

Vider må da

$$1° = \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$

$$v° = \frac{v\pi \text{ rad}}{180°}$$

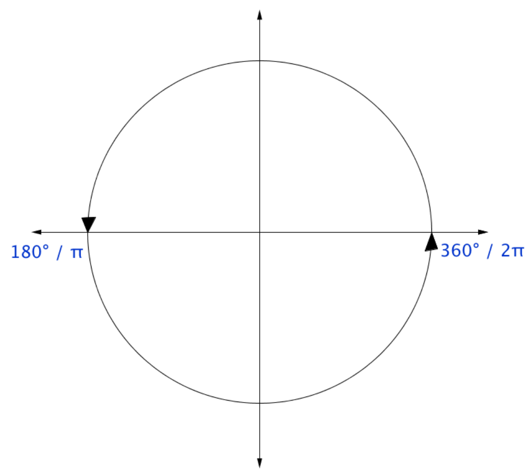


FIGURE 12

De eksakte løsningene kan være vanskelige å forstå, derfor skal vi nå se på en spesiell trekant og vise hvordan vi kommer frem til noen eksakte løsninger. Elevene vet fra før at:

- *Like vinkler i en trekant ⇔ like sider i en trekant. (Regulær trekant)*
- *Vinkelsummen i en trekant er 180°*

$$\Rightarrow \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Når vi halverer en likesidet trekant vil vå få en 30°-60°-90°-trekant, se figur 13. Siden trekanten blir halvert, ser vi at den korteste kateten er halve lengden av hypotenusen. Ved å bruke pytagoras kan vi finne den siste siden.

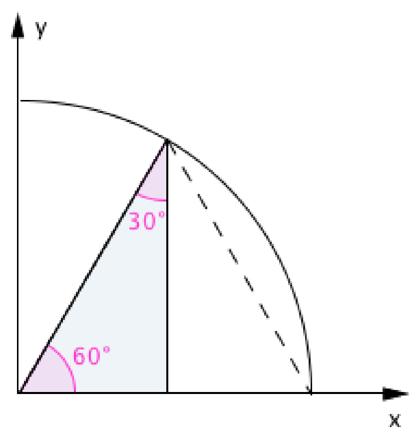


Figure 13

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Videre kan vi regne ut de eksakte verdiene til sin, cos, og tan.

$$\sin 30^\circ = \frac{mot}{hyp} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

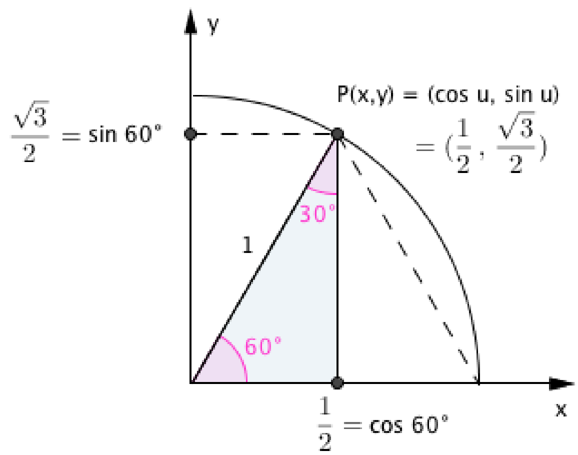


FIGURE 14

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{hos}{hyp} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{mot}{hos} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

3. Arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen

3.1. Arealsetningen: Brukes til å:

1. Finne arealet av vilkårlige trekanter når vi vet to sider og mellomliggende vinkel.
2. Finne en av sidene eller mellomliggende vinkel når vi vet arealet.

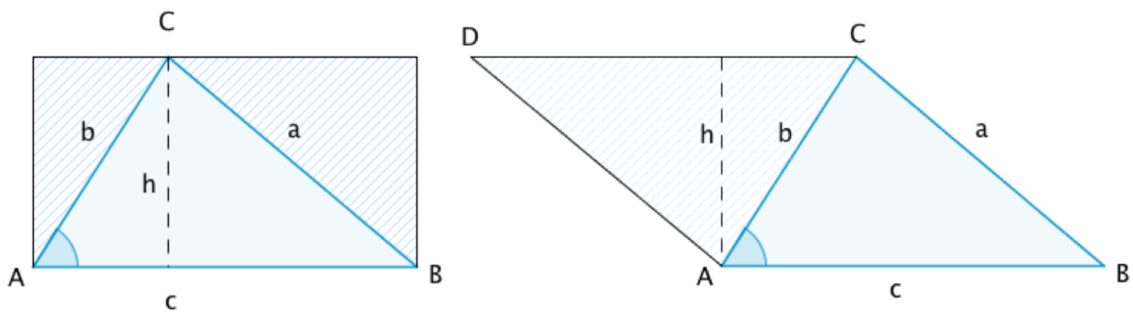


FIGURE 15

Ser fra figuren til venstre i figur 15, at det skraverte området er like stort som trekanten som ikke er skravert.
Kan også illustrere det arealet av trekanten gjennom et parallellogram, se til høyre på figur 15. Speiler △ ABC og får et parallellogram ABCD. Her ser en også at $\triangle ABC$ er halve parallellogrammet ABCD, og dermed er arealet av det skraverte feltet

$$A_{\triangle} = \frac{ch}{2}$$

Vi vet fra før at

$$A_{\triangle} = \frac{gh}{2}$$

siden $g = c$ i vårt tillfelle får vi at

$$A_{\triangle} = \frac{ch}{2}$$

Finner h:

$$\sin A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\sin A$$

Dermed får vi at:

$$A_{\triangle} = \frac{cb\sin A}{2}$$

3.2. **Eksempler på bruk av arealsetningen:**

1. Gitt $AB = 4.5\,cm$, $AC = 2.8\ cm$ og $\angle$ A $= 101°$. Finn arealet til $\triangle$ ABC. Se figur 16.

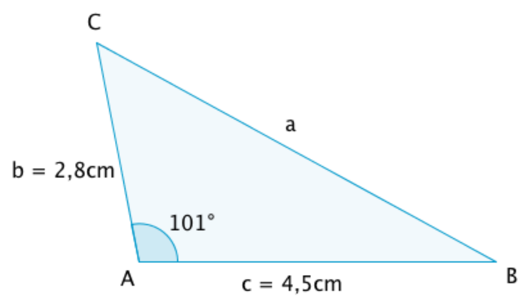


FIGURE 16

$$
\begin{aligned}
Utregning : A_{\triangle} &= \frac{cb\sin A}{2} \\
&= \frac{4.5\ cm \times 2.8\ cm \times \sin 101°}{2} \\
&= 6.2\ cm^2
\end{aligned}
$$

2. Gitt $A_{\triangle} = 43.3\ m$, $AB = 23.1\,m$ og $AC = 8.2\,m$. Se figur 17.

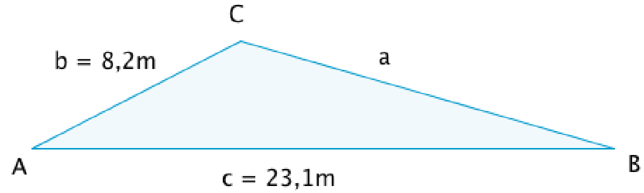


FIGURE 17

$$\begin{aligned}
Utregning : A_{\triangle} &= \frac{cb\sin A}{2}\\
\Rightarrow \sin A &= \frac{2A_{\triangle}}{cb}\\
&= \frac{2\times 43.3\,m}{23.1\,m\times 8.2\,m}\\
&= 0.4571\\
\angle A &= \sin^{-1} 0.4571\\
&= 27.2^\circ
\end{aligned}$$

3.3. **Sinussetningen.** Sinussetningen brukes for å finne en side eller en vinkel. For å bruke sinussetningen må vi ha gitt minst to sider og en vinkel eller to vinkler og en side. Når vi får gitt en vinkel, må denne være motstående til en av de gitte sidene for å kunne bruke sinussetningen. Ved to gitte vinkler kan vi alltid finne den tredje vinkelen, $180° - v_1 - v_2$, derfor er det samme hvilken side som er gitt.

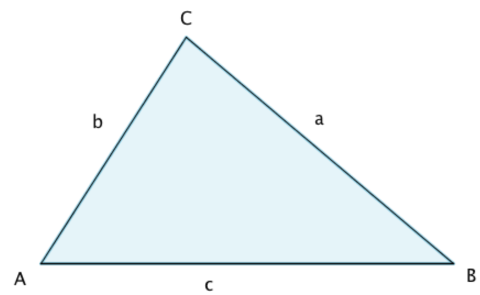


FIGURE 18

Bruker arealsetningen for å bevise sinussetningen.

$$
\begin{aligned}
A_{\triangle} = \frac{bc\sin A}{2} &= \frac{ac\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2} \\
\frac{bc\sin A}{2} &= \frac{ac\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2} \mid \times 2 \\
\frac{bc\sin A}{abc} &= \frac{ac\sin B}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc} \mid \div abc \\
\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}
\end{aligned}
$$

Hvis vi vil finne en side bruker vi ofte å gjøre om på sinussetningen, slik at vi slipper å gjøre om formelen ved hver regning. Vi får:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sin A}{a}\right)^{-1} &= \left(\frac{\sin B}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{\sin C}{c}\right)^{-1} \\
\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}
\end{aligned}
$$

3.4. **Eksempel på bruk av sinussetningen:**

1. Gitt $BC = 6\,cm$, $AC = 4\,cm$ og $\angle B = 30°$. Finn $\angle C$.

Først lager vi en skisse av trekanten:

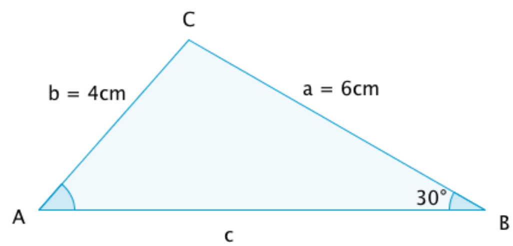


Figure 19

$$\begin{aligned} Utregning : \sin A &= \frac{a \sin B}{b} \\ &= \frac{6 \times \sin 30°}{4} \\ &= 0.75 \\ \angle A &= \sin^{-1} 0.75 \\ &= 48.6° \end{aligned}$$

Vi sjekker om vi kunne hå fått to vinkler for ∠ A:

$$180° - 48.6° = 131.4°$$

Vinkelsummen $131.4° + 30° = 161.4°$ *som er mindre enn 180° og vi vil kunne få to trekanter.*

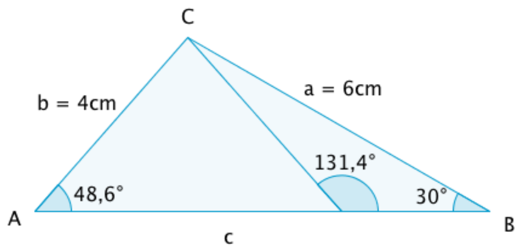


FIGURE 20

3.5. **Cosinussetningen.** Cosinussetningnen brukes enten for

1. å finne en side, når vi har gitt to sider og en vinkel
2. å finne en vinkel, når vi har gitt tre sider

I det første tilfelle når vi skal finne en side, vil vi få en andregradsligning. Da vil vi få to ulike løsninger, ofte en positiv og en negativ verdi. Siden vi er ute etter en lengde kan vi derfor se bort ifra den negative verdien, og får dermed bare et svar som er gyldig.

Bruker Pytagoras' setning til å bevise cosinussetningen. Da ser vi på $\triangle BCD$, se figur 19, og vil finne siden a. Først må vi finne en måte å uttrykke e og f på. Siden vi nå har to sider og den mellomliggende vinkelen kan vi bruke definisjonene av cosinus og sinus for å finne disse.

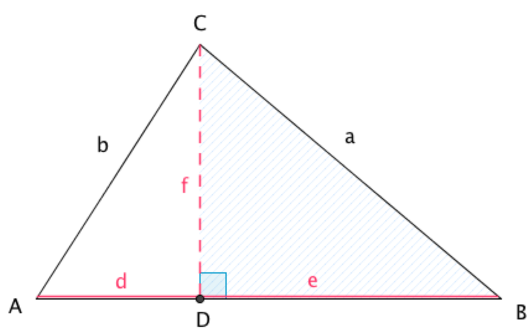


FIGURE 21

$$\begin{aligned} \cos A = \frac{d}{f} &\Rightarrow d = b\cos A \\ &\Rightarrow e = c - d = c - b\cos A \\ \sin A = \frac{f}{b} &\Rightarrow f = b\sin A \end{aligned}$$

Videre setter vi inn disse uttrykkene i Pytagoras' setning, for trekanten vist i figur 21.

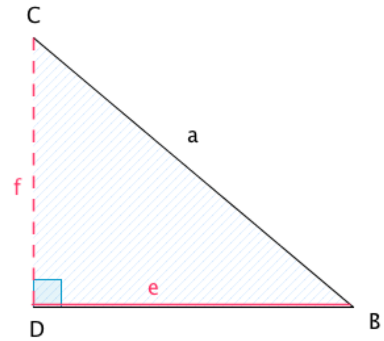


FIGURE 22

$$
\begin{aligned}
a^2 = e^2 + f^2 & \\
\Rightarrow a^2 &= (c - b\cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\
&= c^2 - 2bc\cos A + (b\cos A)^2 + b^2 \sin^2 A \\
&= c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2 \sin^2 A \\
&= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) \\
&= c^2 - 2bc\cos A + b^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
$$

Kan også bevise cosinussetningen ved hjelp av vektorregning.

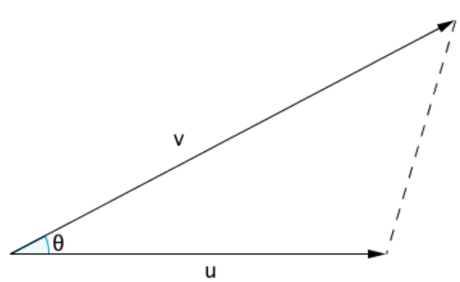


FIGURE 23

Minner om;

$$u \times v = |u||v|\cos\theta$$

og vi får

$$\begin{aligned}||v-u||^2 &= (v-u)(v-u)\\ &= v\times v - 2uv + u\times u\\ &= ||v||^2 + ||u||^2 - 2|u||v|\cos\theta\end{aligned}$$

Dette ser vi da er cosinussetningen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

3.6. **Eksempler på bruk av cosinussetningen:**

1. Gitt $AC = 2\,cm$, $AB = 6\,cm$ og $\angle B = 45°$. Finn BC.

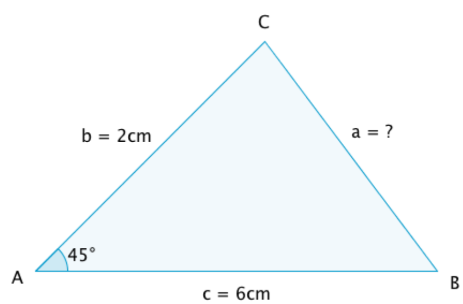


FIGURE 24

$$\begin{aligned}Utregning: a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A\\ a^2 &= 2^2 + 6^2 - 2\times 2\times 6\times\cos 45°\\ a^2 &= 4 + 36 - 16.97\\ a &= \sqrt{16.97}\\ a &= 4.8cm\end{aligned}$$

2. Gitt $AB = 6\,cm$, $BC = 4.8\,cm$ og $AC = 2\,cm$. Finn $\angle B$.

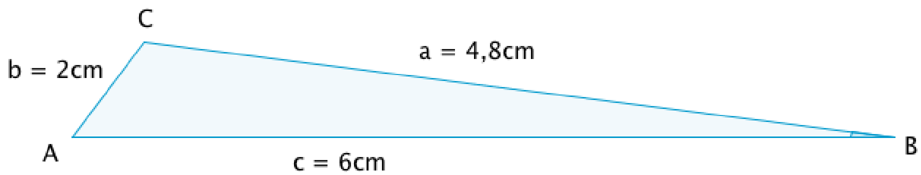


FIGURE 25

Utregning:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\
b^2 - a^2 - c^2 &= -2ac\cos B \mid \div 2ac \\
\frac{b^2}{-2ac} - \frac{a^2}{-2ac} - \frac{c^2}{-2ac} &= \frac{-2ac\cos B}{-2ac} \\
\frac{b^2 + a^2 + c^2}{2ac} &= \cos B \\
\cos B &= \frac{b^2 + a^2 + c^2}{2ac} \\
\cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\
\cos B &= \frac{5^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 3} \\
\cos B &= \frac{25 + 9 - 16}{30} \\
\cos B &= 0,6 \\
\angle B &= 53.1^\circ
\end{aligned}
$$

3. Gitt $BC = 6\,cm$, $AC = 4\,cm$ og $\angle$ B $= 30\,°$. Finn lengde c.

Først lager vi en skisse av trekanten:

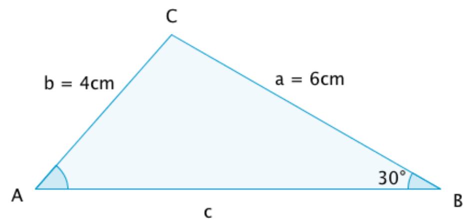


FIGURE 26

Dette eksempelet kjenner vi igjen fra eksempel 3.4.1 fra sinussetningen. Her vil vi se at vi også kan bruke cosinussetningen.

Utregning:

$$
\begin{gathered}
b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\
-c^2 = a^2 - b^2 - 2ac\cos B \\
c^2 = -a^2 + b^2 + 2ac\cos B \\
c^2 - 2ac\cos B + (a^2 - b^2) = 0 \\
c^2 - 2 \times 6\cos 30^\circ + (6^2 - 4^2) = 0 \\
c^2 - 10.39c + 20 = 0
\end{gathered}
$$

$$c_1 = 2.55 \vee c_2 = 7.84$$

Altså ser vi at i likhet med resultatet fra sinussetningen (eks 3.4.1) der vi fikk to løsninger, får vi også tvedydig svar ved bruk av cosinussetningen.

3.7. Når bruker vi cosinus og sinussetningen?

- Vi har gitt to vinkler, $\angle A$ og $\angle B$, og en side b, se figur 27. Finner side a ved hjelp av sinussetningen.

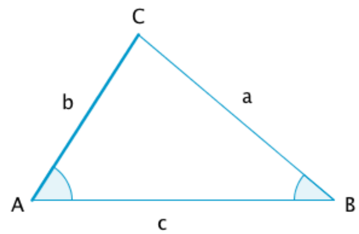


FIGURE 27

Siden vinkelsummen i en trekant er 180°, vet vi også $\angle C$. Derfor er det det samme hvilken side som er gitt, og vi kan bruke sinussetningen uansett. I dette tilfellet kan vi ikke bruke cosinussetningen fordi da må vi ha to sider.

- Vi har gitt side b, side c og mellomliggende vinkel $\angle A$. Finner side a ved hjelp av cosinussetningen. Videre kan vi finne vinkel $\angle B$ og $\angle C$ ved hjelp av sinussetningen. Da velger vi først å finne den motstående vinkelen til den korteste siden. Dette gjør vi fordi denne vinkelen må være spiss og dermed støter vi ikke på noen tvetydig svar.

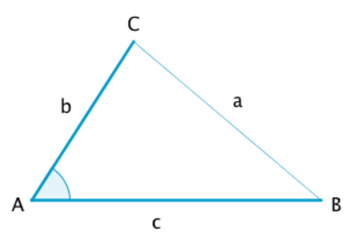


FIGURE 28

Her vet vi ikke den tilhørende vinkel til de gitte sidene og vet ikke motstående side til den gitte vinkelen. Derfor kan vi ikke bruke sinussetningen i første omgang.

- Vi har gitt en vinkel, $\angle A$, en hosliggende side c og en motstående side a. Finner $\angle C$ ved å bruke sinussetningen. Vær obs på at her kan det dannes to ulike trekanter. Vi kan få to verdier for sinus og dermed to ulike verdier for $\angle C$, se figur 29.

  Vi kan også bruke cosinussetningen her for å finne den siste lengden, altså side b. Her kan vi også få tvetydig svar. Når vi skal finne en lengde får vi en andregradslikning, og får dermed to svar. Hvis vi kommer i et tilfelle med et positivt og et negtivt svar, kan vi eliminere bort det negative svaret, siden vi snakker om lengder. Når vi ser på cosinussetningen, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, ser vi at når vi skal finne den motstående siden til den gitte vinkelen vil vi ikke få noe førstegradsledd. Dette fører til at vi får et positive og et negativt svar. Dermed vil det ikke defineres som et tvetydig svar i dette tilfellet.
  I de tilfellene vi har både andregradsledd og førstegradsledd vil vi kunne få to positive røtter, og dermed få tvetydig svar.
  Hver gang cosinussetningen er tvetydig så vil også sinus være tvetydig.

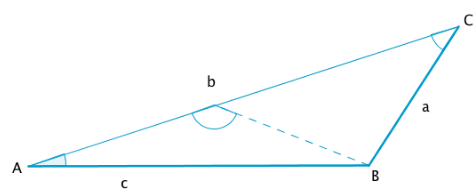


FIGURE 29

- Vi har gitt tre sider a, b og c. Finner $\angle A, \angle B$ og $\angle C$ ved hjelp av cosinussetningen. Tips: Skal en finne alle tre vinklene så er det lurt å starte med den motstående vinkelen til den lengste siden, i vårt tilfelle $\angle B$. Dette er fordi den motstående siden til den lengste siden er butt. Dermed kan vi ved bruk av sinussetningen på denne vinkelen få to ulike verdier, dette unngår vi ved å bruke cosinussetningen på denne vinkelen. Deretter kan vi bruke sinussetningen for å finne $\angle A$ og $\angle C$.

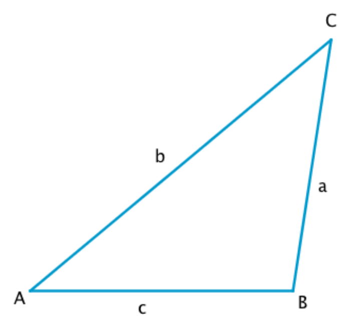


FIGURE 30

- Når vi har gitt tre vinkler, kan vi hverken bruke cosinussetningen eller sinussetningen til å finne sidene i trekanten. Tre like vinkler viser til formlikhet og ikke kongruens.

4. Trigonometriske sammenhenger

- $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$
- $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$
- $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$
- $\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$

Velger å bevise den siste setningen ved hjelp av vektorregning og kan derfra utlede de andre formlene.

4.1. Bevis for $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$.

Differansen mellom vinklene er $u - v$.

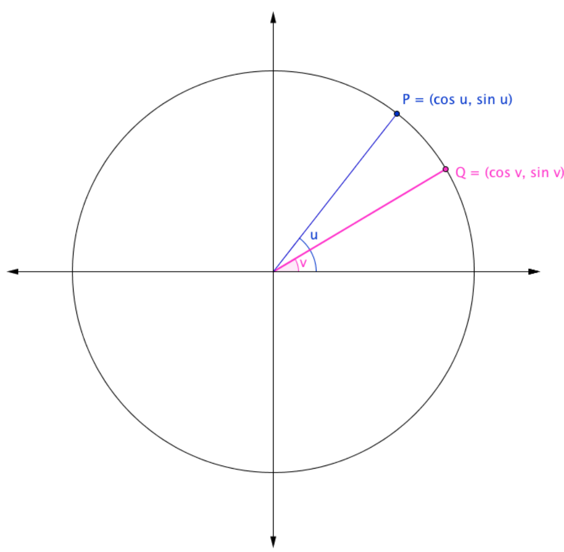


Figure 31

Skalar på produktform:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} &= [\cos u, \sin u] \times [\cos v, \sin v] \\ &= \cos u \cos v + \sin u \sin v\end{aligned}$$

Minner om definisjonen fra vektorregning:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \mid \overrightarrow{a} \mid \times \mid \overrightarrow{b} \mid \times \cos u$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OP}| \times |\overrightarrow{OQ}| \times \cos(u-v) \\ &= 1 \times 1 \times \cos(u-v) \\ &= \cos(u-v)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

4.2. **Bevis for** $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$**.**

$$\begin{aligned}\cos(-v) &= \cos v \\ \sin(-v) &= -\sin v \\ u+v &= u-(-v)\end{aligned}$$

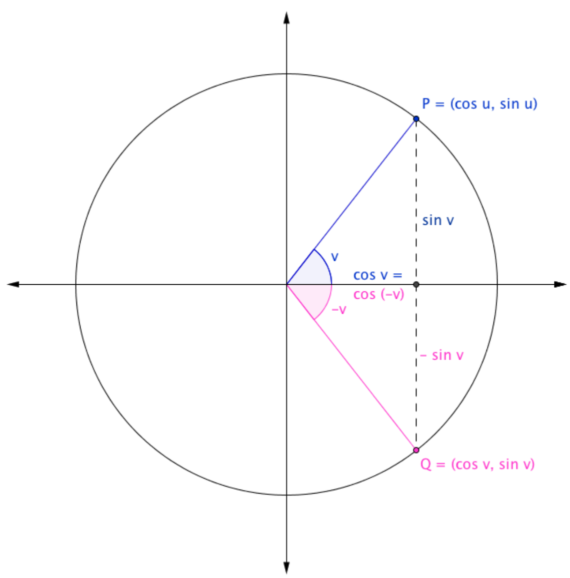


Figure 32

Vi vet

$$\begin{aligned}\cos(u-v) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ \cos(u+v) &= \cos(u-(-v))\end{aligned}$$

Videre er da

$$\begin{aligned}\cos(u-(-v)) &= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

4.3. **Bevis for** $\sin(u-v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ **og** $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$**.** Vi har følgende regler:

$$\begin{aligned} \cos v &= \sin(90^\circ - v) \\ \sin v &= \cos(90^\circ - v) \end{aligned}$$

Dette fremkommer av enhetssirkelen ved å tegne vinkel v og vinkel $(90^\circ - v)$, les av på x- og y-aksen som forklart i kapittel 2.

Dermed kan vi substituere u med 90°og v med $(u+v)$, slik at vi får

$$\begin{aligned} \sin(u+v) &= \cos(90^\circ - (u+v)) \\ &= \cos((90^\circ - u) - v) \\ &= \cos(90^\circ - u)\cos v + \sin(90^\circ - u)\sin v \\ &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \\ \Rightarrow \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \end{aligned}$$

Her har vi kun substituert som beskrevet, og bruker $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ videre.

For å videre bevise $\sin(u-v)$, bruker vi enkel algebra.

$$\begin{aligned} \sin(u-v) &= \sin(u + (-v)) \\ &= \sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v) \\ &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \\ \Rightarrow \sin(u-v) &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \end{aligned}$$

4.4. **Alternativt bevis for addisjonssetningene.** Bruk figur 33 mens du følger utledningen.

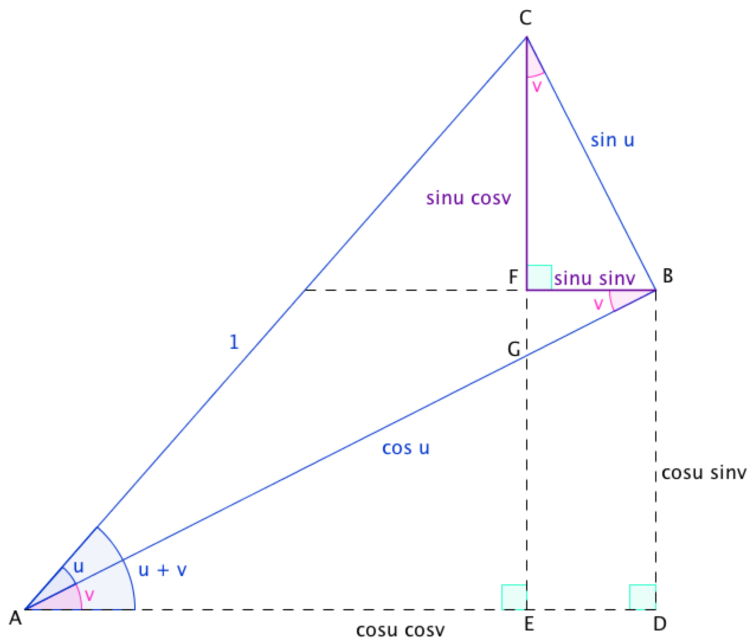


FIGURE 33

Først tegner vi $\triangle ABC$, med hypotenus $AC = 1, \angle ABC = 90°$ og $\angle = BAC = u$. Siden vi vet at

$$\sin x = \frac{mot}{hyp} \Rightarrow mot = hyp \sin x$$

og

$$\cos x = \frac{hos}{hyp} \Rightarrow hos = hyp \cos x$$

må $AB = 1 \times \cos u = \cos u$ og $BC = 1 \times \sin u = \sin u$. Videre trekkes en linje loddrett ned fra $\angle ABC$ til et punkt D. Nå har vi en $\triangle ABD$ med hypotenus $AB = \cos u, \angle ADB = 90°$ og $\angle BAD = v$.
På samme måte som vi fant AB og BC, finner vi AD og BD. $AD = hyp \cos v = \cos u \cos v$ og $BD = hyp \sin v = \cos u \sin v$.
Videre trekker vi en linje fra C normalt på linja AD, og får er nytt punkt E. Nå ser vi at $\cos(u+v) = AD - ED$.
For å kunne finne $\sin(u+v)$ trekker vi en ny linje fra B normalt på CE og ser at $\sin(u+v) = BD + CF$. Vi må altså finne ED og CF. Vi kaller punktet hvor AB og CE krysser for G og ser at $\triangle BCG \sim \triangle AGE$. Dette kan vi se fordi begge disse trekantene har en 90 °- vinkel og $\angle AGE = \angle BGC = 90°$.

Altså er $\angle GCB = \angle EAG = v$. Videre ser vi på $\triangle BCF$. Vi får at $FB = hyp \sin v = \sin u \sin v = ED$ og $CF = hyp \cos v = \sin u \cos v$. Slik at

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= AD - ED \\ &= \ cosu \cos v - \sin u \sin v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= BD + CF \\ &= \cos u \sin v + \sin u \cos v\end{aligned}$$

5. Harmoniske svingninger

5.1. **f(x)=Asin(kx+φ)+d.** Enhver periodiske bevegelse som kan beskrives med funksjonen $f(x) = A\sin(kx + \varphi)$ der $A > 0$ kaller vi en *harmonisk svingning.* Vi vet fra før at sinus har generelle variasjoner. Videre skal vi nå forklarer fire konstanter som påvirker dette, A, k, φ og d.

Amplitude A er den avstanden fra likevektslinja til høyeste eller laveste punkt på grafen.

$$A = \frac{y_{maks} - y_{min}}{2}$$

Likevektslinje $y = d$

$$d = \frac{y_{maks} - y_{min}}{2}$$

k bestemmer perioden og ϕ faseforskyvning

$$f(x) = \sin(kx + \varphi) \Rightarrow f(x) = \sin(x + \frac{\varphi}{k})$$

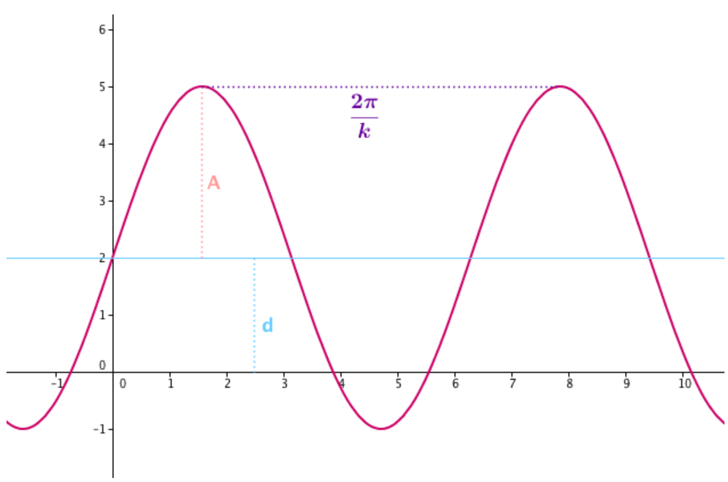


FIGURE 34. $f(x) = 3\sin x + 2$

Her ser vi direkte at faseforskyvningen er $|\frac{\varphi}{k}|$, forutsetter at $k > 0$.

Vi finner faseforskyvningen til $g(x) = \cos(kx + \varphi)$ på samme måte som $f(x) = \sin(kx + \varphi)$.

Når φ er negativ er faseforskyvningen mot *høyre*, og når φ er positiv er faseforskyvningen mot *venstre*.

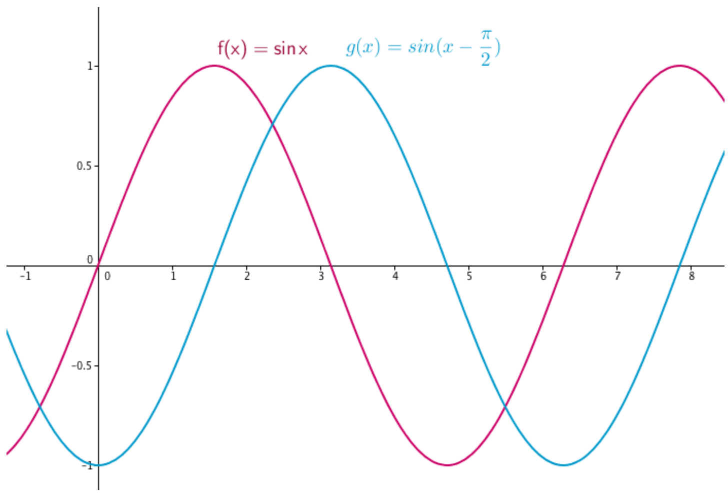


FIGURE 35. Faseforskyvning

5.2. **Asin(kx+φ)=a sin kx+b cos kx.** *Der* $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ *og* $\tan\varphi = \frac{b}{a}$. Der φ ligger i samme kvadrant som punktet (a, b).

Ofte ønsker vi å få $a \sin kx + b \cos kx$ over til formen $A \sin(kx + \varphi)$. Siden vi nå har en funksjon uttrykt kun ved sinus, og ikke lenger sinus og cosinus. Dette vil nå gjøre det lettere å finne funksjonens egenskaper og utforming, se forklaring i punkt 5.1.

Bevis:

$$\begin{aligned}A \sin(kx + \varphi) &= A(\sin kx \cos\varphi + \cos kx \sin\varphi) \\ &= A\cos\varphi \sin kx + A \sin\varphi \cos kx \\ &\Downarrow A\cos\varphi = a \text{ og } A\sin\varphi = b \\ &= a \sin kx + b \cos kx\end{aligned}$$

Kan vise at A=$\sqrt{a^2 + b^2}$, ved enhetsformelen.

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{(A\cos\varphi)^2 + (a \sin\varphi)^2} \\ &= \sqrt{A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \\ &= \sqrt{A^2 \times 1} \\ &= A\end{aligned}$$

Vi ser at $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ når $\cos\varphi \neq 0$. Vi bruker da at

$$a = A\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{A}$$
$$b = A\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{b}{A}$$

Vi vet at $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ for $\cos\varphi \neq 0$, og får at $\tan\varphi = \frac{\frac{b}{A}}{\frac{a}{A}} = \frac{b}{a}$

5.3. **Omforming av uttrykk.**

$$f(x) = 5\sin 2x + \cos 2x$$
$$A = \sqrt{5^2 + 1^1} = 5.10$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{5} \to \varphi = 0.2$$

$$f(x) = 5.10\sin(2x + 0.2)$$

Amplitude: 5.10
Periode: $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
Faseforskyvning er $\frac{\varphi}{k} = \frac{0.2}{2} = 0.1$ mot venstre
$v^\circ = 54.7^\circ + k \times 180^\circ \quad \vee \quad v^\circ = -54.7 + k \times 180^\circ$

$$v_1{}^\circ = 54.7^\circ$$
$$v_2{}^\circ = 125.3^\circ$$
$$v_3{}^\circ = 234.7^\circ$$
$$v_4{}^\circ = 305.3^\circ$$

$$L = \{54.7^\circ, 125.3^\circ, 234.7^\circ, 305.3^\circ\}$$

Toppunkter: (0.415 + 4, 19k, 6)

f(x)= har sin minste verdi når $\sin 1.5x + 0.8 = 1$.Da er f(x) = -4 + 2 = -2.Videre har vi at:

$$\sin 1.5x + 0.8 = -1$$
$$1.5x + 0.8 = -1.751k2\pi$$
$$x = -1.58 + 4.19k$$
$$\Downarrow \text{k=1, plusser på en runde}$$
$$= 2.61 + 4.19k$$

Bunnpunkter (2.6 + 4.19k, -2)

References

1. Hals, Hanisch, Oldervoll, Orskaug og Vaaje. (2008). Sinus Matematikk R2. Cappelen Damm
2. Hanish, Oldervoll, Orskaug og Vaaje. (2007). Sinus Matematikk 1T. Cappelen
3. Moe, Skrede, Heir og Erstad (2008) Matematikk R2. Aschehoug.
4. Kap: Trigonometri fra 1T og R2 hentet fra ndla.no