UiO : Universitetet i Oslo

Kul geometri - volum og overflate av kulen

Helmer Aslaksen

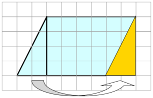
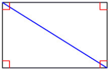
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning/Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

helmer.aslaksen@gmail.com
www.math.nus.edu.sg/aslaksen/

Regulære *n*-kanter

- Hva kaller vi en firkant med like lange sider?
- Rombe, ikke kvadrat!
- Hva kaller vi en firkant med like store vinkler?
- Rektangel, kommer fra rectangulus, som betyr rett vinkel, siden de fire vinklene alle er rette.
- En mangekant kalles regulær hvis den har like lange sider og like store vinkler.
- For trekanter er de to betingelsene ekvivalente.

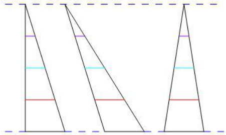
Areal av trekanter 1

- VI starter med formelen for arealet av et rektangel.
- Gitt et parallelogram, kan vi konstruere et rektangel med samme areal.
- 
- Gitt en rettvinklet trekant, kan vi konstruere et rektangel med dobbelt så stort areal.
- 
- Gitt en vilkårlig trekant, kan vi konstruere et parallellogram med dobbelt så stort areal.
- 

Areal av trekanter 2

- Volumet av en pyramide i $\mathbb{R}^n$ er grunnflate ganger høyde delt på n.
- Vi lager en pyramide $P(B, V)$ i $\mathbb{R}^n$ ved å ta et polyeder i $\mathbb{R}^{n-1}$ og forbinde de $(n-2)$-dimensjonale sideflatene til B med et punkt V med $x_n(V) = h \neq 0$. Volumet av tverrsnittet med et horisontalt plan med høyde x er $V_{n-1}(P(B, V) \cap \{x_n = x\}) = (x/h)^n V_{n-1}(B)$, så $V_n(P(B, V)) = \int_0^h V_{n-1}(B)(x/h)^n \, dx = \dfrac{1}{n+1} V_{n-1}(B)h.$

Areal av trekanter 3 - Cavalieris prinsipp

- Bonaventura Francesco Cavalieri (1598—1647) formulerte i 1635 en metode som tidligere også var blitt brukt av Arkimedes (ca. 287 f.Kr. — ca. 212 f.Kr.) og Zǔ Gèngzhī 祖暅之, (ca. 450 – ca. 520).
- Cavalieris prinsipp i planet: Anta at to figurer i planet ligger mellom to parallelle linjer, og at alle linjer som er parallelle med disse to skjærer figurene i linjestykker av samme lengde. Da har de to figurene samme areal.
- 

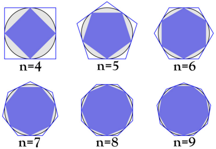
Definisjonen av π

- π er omkrets delt på diameter.
- Er dette veldefinert?
- Vi må vise at forholdet mellom omkrets og diameter ikke avhenger av hvilken sirkel vi velger.
- La $P(S)$ betegne omkretsen til en lukket kurve S. Anta at P_n er en familie av polygoner innskrevet i enhetssikrelen, C_1, slik at omkretsen til P_n konvergerer mot omkretsen til enhetssirkelen, $\lim_{n\to\infty} P(P_n) = P(C_1)$. Hvis vi strekker P_n med en faktor r, får vi en familie med polygoner som er en tilnærming til sirkelen med radius, C_r. Siden en polygon består av rette linjer, er det lett å se at $P(rP_n) = rP(P_n)$, og vi får

  $$P(C_r) = \lim_{n\to\infty} P(rP_n) = \lim_{n\to\infty} rP(P_n) = r \lim_{n\to\infty} P(P_n) = rP(C_1).$$

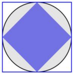
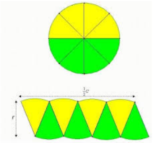
  Dette impliserer at π er veldefinert.

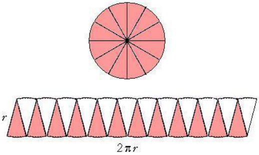
Verdien av π

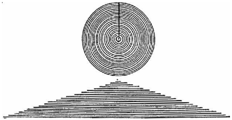
- Ved å se på innskrevne og omskrevne firkanter får vi $2\sqrt{2} < \pi < 4$.
- 

- Ved å se på en innskreven 6-kant får vi $\pi > 3$.
- Ved å se på 96-kanter, viste Arkimedes at $223/71 < \pi < 22/7$ eller $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

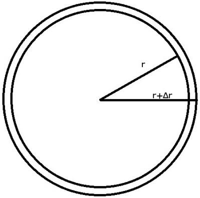
Areal av sirkelen

- Det er lett å se at arealet av sirkelen er mellom $2r^2$ og $4r^2$.
- 
- 



- 

Den deriverte av arealet er omkretsen

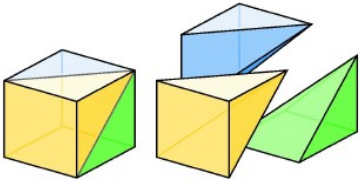
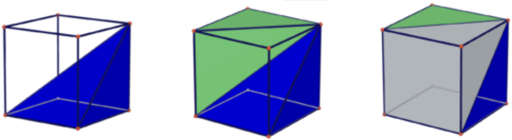
- 

- $A(r+\Delta r) - A(r) = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi(2r\Delta r + (\Delta r)^2).$
- $$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r+\Delta r) - A(r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \pi(2r+\Delta r) = 2\pi r.$$
- Alternativt kan vi brette ut «ringen» og få et rektangel, slik at $\Delta A \approx C\Delta r$, hvor $C(r)$ er omkretsen.

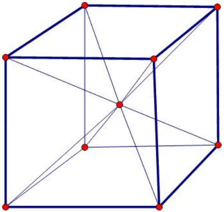
Hva med kvadratet?

- $A(s) = s^2$, $C(s) = 4s$.
- Hvis vi øker s med Δs får «ringen» tykkelse $\Delta s/2$.
- Sett i stedet $t = s/2$. Da blir $A(t) = (2t)^2 = 4t^2$ og $C(t) = 4(2t) = 8t$.

Volum av pyramide 1

- Volumet av en kvadratisk pyramide med toppunkt over et hjørne og høyde og side lik 1 er $1/3$.
- 
- 

Volum av pyramide 2

- Volumet av en kvadratisk pyramide med toppunkt over et hjørne og høyde $1/2$ og side 1 er $1/6$.
- 

Volum er vanskeligere enn areal

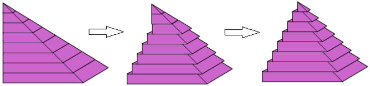
- Carl Friedrich Gauß (1777-–1855) påpekte at for å utlede formelen $gh/3$ for en vilkårlig pyramide, må man bruke et grenseargument.
- Det enkleste er å bruke Cavalieris prinsipp i rommet: Anta at to figurer i rommet ligger mellom to parallelle plan, og at alle plan som er parallelle med disse to skjærer figurene i tverrsnitt av samme areal. Da har de to figurene samme volum.
- 

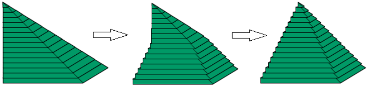
Volum er vanskeligere enn areal 2

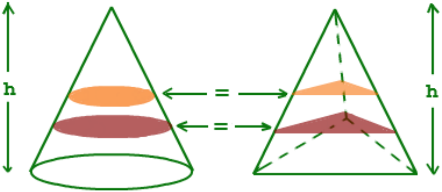
- Dette henger sammen med Hilberts tredje problem. To polygoner med samme areal kan klippes og limes slik at de blir like. Men Max Dehn viste i 1901 at det finne polyedre med samme volum som ikke er «saksekongruent». Dette illustrerer at volum er et mer komplisert begrep.
- Et annet eksempel er Banach-Tarski paradokset som sier at man kan kutte en kule opp i et endelig antall biter, og så sette disse bitene sammen slik at de danner to kuler med samme volum som den opprinnelige kulen.

Volum av pyramide 3

- Vi kan nå bruke Cavalieris prinsipp til å konkludere at formelen $V = gh/3$ holder for alle pyramider og kjegler.



- 

- 

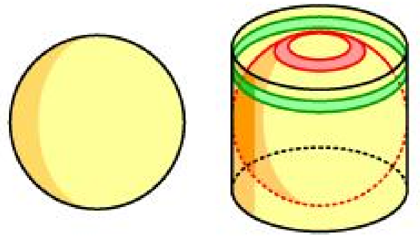
Overflate og volum av kule 1

- På tilsvarende måte som for sirkelen kan vi vise at hvis $V(r)$ er volumet av kulen med radius r og $A(r)$ overflaten, så er $V'(r) = A(r)$.
- Vi trenger derfor bare å utlede en av formlene

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Overflate og volum av kule 2

- Anta at du har et oppl\u00e5sbart halvkuleformet telt. N\u00e5r det ligger flat p\u00e5 bakken, har det areal πr^2. Hvor mye har arealet strukket seg n\u00e5r du har bl\u00e5st det opp til en havlkule?



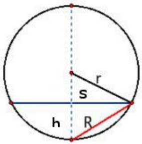
-
- Hvis halvkuleteltet er omskrevet at et sylindertelt, s\u00e5 er arealet av sylinderteltet
$$\pi r^2 + 2\pi r \cdot r = 3\pi r^2.$$

Overflate og volum av kule 3

- Det er fristende å gjette formelen $A(r) = 4\pi r^2$. Da blir arealet av bunnen av halvsirkelteltet er πr^2, arealet av toppen av halvsirkelteltet er $2\pi r^2$ og arelaet av sylinderteltet $3\pi r^2$.
- Dette er kanskje lettere for amerikanske elever å forstå, siden de er vant til baseballer.

Overflate av kulekalott

- En kulekalott med høyde h og avstand fra pol til rand R har i følge Arkimedes areal $2\pi rh$. Vi skal nå vise at dette også kan skrives som πR^2.



- La s være radiusen til randen til kalotten. Da er

$$\begin{aligned}(r-h)^2 + s^2 &= r^2,\\ h^2 + s^2 &= 2rh,\\ R^2 = h^2 + s^2 &= 2rh.\end{aligned}$$

- Hvis vi setter $h = r$ eller $h = 2r$, får vi formlene for areal av halvkule og kule.