UiO : Universitetet i Oslo

Sannsynlighet og kombinatorikk i videregående skole

Helmer Aslaksen

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning/Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

helmer.aslaksen@gmail.com
www.math.nus.edu.sg/aslaksen/

Takk for at dere har invitert meg!

- Takk for at dere har tatt dere tid til å komme!

Min bakgrunn

- Cand. mag fra UiO.
- PhD fra University of California, Berkeley.
- 22 år ved Department of Mathematics, National University of Singapore.
- Introduserte to nye «General Education Modules»: «Heavenly Mathematics and Cultural Astronomy» og «Mathematics in Art and Architecture».
- Visepresident for Singapore Mathematical Society.
- Konsulent for lærebøker for Ministry of Education i Singapore.
- Chair of organizing committee for Singapore Math Olympiad.

Min bakgrunn 2

- Flyttet tilbake til Norge i 2011 for å ta en delt stilling ved Institutt for lærerutdanning og Matematisk institutt.
- Jeg har introdusert et nytt kurs ved UiO, MAT4010 Matematikk, skole og kultur.
- Jeg driver med noe midt i mellom matematikk og matematikkdidaktikk. Jeg kaller det didaktisk matematikk.

Hvorfor er matematikkunnskaper viktig i lærerutdanningen?

- Elever stiller ofte gode spørsmål, men de greier ofte ikke å uttrykke spørsmålene på en klar måte. Hvis du har gode fagkunnskaper kan du lettere forstå hva de mener. Det er viktig å svare godt på spørsmål fra elevene!
- Elever foreslår ofte alternative fremgangsmåter. Hvis du har gode fagkunnskaper kjenner du kanskje allerede til denne metoden, eller du kan raskt se at det er en gyldig metode, eller du kan raskt forklare hvorfor det ikke er riktig og gi et moteksempel.
- Hvis du har gode fagkunnskaper kjenner du til vanlige misoppfatninger og kan raskere rydde opp i dem når de dukker opp hos elevene dine.

Hvorfor er matematikkunnskaper viktig i lærerutdanningen? 2

- Hvis du bare vet om en måte å løse et problem på, er det vanskelig å differensiere. Dess bedre du forstår et problem, dess bedre kan du differensiere forklaringen dine.
- Hvis du bare har en instrumentell forståelse av det du underviser er det vanskelig å gi elevene en relasjonell forståelse.
- Det er viktig at du har horisontkunnskap, slik at det du lærer elevene leder hen mot det de vil lære videre. Jeg har sett lærere på ungdomsskolen som ikke vet at vinklene i en trekant har samme navn som motstående sider. Det gjør det vanskeligere for elevene når de skal lære om sinus- og cosinussetningene på VGS.
- Du vil føle deg tryggere i klasserommet hvis du har en dyp forståelse. Usikkerhet stinker!

Hvordan får du gode matematikkunnskaper?

- I den tradisjonelle matematikkundervisningen ved universitetet fokuseres det på trening av fremtidige forskere innen matematikk eller brukere av matematikk innen andre fag. Det er lite fokus på den kunnskapen som er nødvending for å kunne forstå og forklare skolematematikken.
- I gamle dager hadde lærerstudentene bedre matematikkunnskaper fra skolen, og flere av det beste studentene gikk inn i skolen.
- Våren 2014 startet jeg et nytt kurs ved Matematisk institutt: MAT4010 Matematikk, skole og kultur, rettet mot studentene på Lektorprogrammet.

Hvorfor sannsynlighetsregning og kombinatorikk?

- Mange har dårlig bakgrunn.
- Det er vanskelig å få poeng for delvis riktig svar. Enten er det riktig eller så er det galt.
- Det er lett å gjøre feil. Gale argumenter kan se riktige ut.
- Riktige argumenter kan se gale ut!
- Sannsynlighet og kombinatorikk er vanskelig!
- Hvis du ikke synes sannsynlighetsregning er vanskelig, så har du ikke forstått det!
- Det er derfor det er morsomt!

Hva vil jeg snakke om i dag?

- Noen ganger diskuterer vi ting dere kan si til alle elevene.
- Noen ganger diskuterer vi ting dere kan si til flinke elever.
- Noen ganger diskuterer vi ting dere sannsynligvis aldri vil si til elevene, men som gir dere en forståelse som gjør at dere kan føle dere trygge når dere gir en forenklet forklaring til elevene.
- Et mål for alt jeg snakker om er at ingen vil spørre: «Hvorfor snakker vi om dette?» Jeg håper at alle vil være enige i at dette er relevant for lærere.

Hva vil jeg snakke om i dag? 2

- Utvalg
- Sannsynlighetsregningens historie
- Tobarnsfamilieproblemet

Utvalg

- Mange oppgaver, spesielt på ungdomsskolen, er vanskelige fordi det (etter min mening) er uklart om utvalgene er med eller uten tilbakelegging og om de er ordnet eller uordnet.
- En lærer har 2 oppgaver om algebra, 3 om geometri og 4 om sannsynlighet, og skal lage en prøve med én oppgave av hver type. Hvor mange forskjellige prøver kan læreren lage?
- Er det ordnet eller uordnet?

Utvalg 2

a. Hvor mange utfall (kombinasjoner) kan du få når du kaster to vanlige terninger?
b. Hvilket av disse utfallene er mest sannsynlig å få på ett kast med *fem* terninger?
   - Kombinasjonen: 1.2.3.4.5
   - Kombinasjonen $6, 6, 6, 6, 6$
   - De er like sannsynlige

- Fasiten sier 36 og $1, 2, 3, 4, 5$.
- I a) mener de ordnet, i b) mener de uordnet.

Utvalg 3

- Spørsmålet er om terningene er like eller forskjellige.
- Anta at den ene terningen er gul og den andre er blå. Da er det 36 mulige utfall.

	G-1	G-2	G-3	G-4	G-5	G-6
B-1						
B-2						
B-3						
B-4						
B-5						
B-6						

- Hvor mange forskjellige utfall er det hvis terningene er like?
- Det er 21 utfall. Vi har en ikke-uniform sannsynlighetsmodell, hvor 15 utfall (de over diagonalen) har sannsynlighet $1/18$ og 6 utfall (de på diagonalen) har sannsynlighet $1/36$.

	1	2	3	4	5	6
1	X	XX	XX	XX	XX	XX
2		X	XX	XX	XX	XX
3			X	XX	XX	XX
4				X	XX	XX
5					X	XX
6						X

Utvalg 4

- Hva er den mest sannsynlige summen hvis du kaster to terninger?
- Lat som om den ene terningen er gul og den andre er blå.

	G-1	G-2	G-3	G-4	G-5	G-6
B-1	2	3	4	5	6	7
B-2	3	4	5	6	7	8
B-3	4	5	6	7	8	9
B-4	5	6	7	8	9	10
B-5	6	7	8	9	10	11
B-6	7	8	9	10	11	12

- Sannsynligheten for å få 7 er $6/36 = 1/6$.
- Hvis terningene er like, har vi en ikke-uniform sannsynlighetsmodell. Sannsynligheten for å få 7 er $3 \times 1/18 = 1/6$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2		4	5	6	7	8
3			6	7	8	9
4				8	9	10
5					10	11
6						12

Utvalg 5

- Dette er viktig i mange brettspill, for eksempel i Settlers from Catan og Monopol.

Ja takk, begge deler!

- S1 oppgave: «På et fat ligger det epler, pærer, bananer, appelsiner og kiwi. Du skal ta med deg frukt på tur, høyst én frukt av hver type. Hvor mange utvalg kan du gjøre?»
- Gjør denne oppgaven på to måter. Som et ordnet utvalg eller som et uordnet utvalg!
- I boken stod oppgaven etter et avsnitt om ordnete utvalg.
- Uordnet:
$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=5+10+10+5+1=31$$
- Ordnet: Svar ja eller nei til hver frukt. Det gir et ordnet 5-tuppel av 0 og 1 (hvor ikke alle er 0). Det er $2^5-1=31$ slike.
- Kan også tolke det som ikke-null binære tall med opp til fem siffer.

Fire typer av utvalg

- Velg k fra n objekter

	Med tilbakelegging	Uten tilbakelegging
Ordnet	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!} = n\cdots(n-k+1)$
Uordnet	$\dbinom{k+n-1}{k}$	$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

- Bemerk at $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!/(n-k)!}{k!} = \dfrac{n\cdots(n-k+1)}{1\cdots k}$.
- $\dbinom{k+n-1}{k}$ kan skrives som $\left(\!\!\dbinom{n}{k}\!\!\right)$ og kalles multivelg.

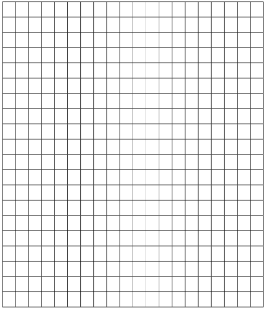
Bars and stars

- Anta at du velger $k = 5$ fra $n = 3$ objekter, uordnet med tilbakelegging. For eksempel $[1, 1, 2, 2, 3]$, $[1, 1, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 3, 3, 3]$. (Dette kalles multiset.)
- Se for deg en avlang pilleboks med 3 rom. La [være endeveggene, | skilleveggene og $*$ pillene. Da kan utvalgene over beskrives som $[** \mid **|*]$, $[*****||]$, $[** || ***]$.
- Se nå for deg et brett med $k + n - 1 = 7$ hull, hvor hvert hull skal fylles med en stjerne eller en skillevegg. Et slik plassering er bestemt av hvor du plaserer de k stjernene (eller de $n - 1$ skilleveggene).
- $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$. (Husk at $k + n - 1 - k = n - 1$.)

Farge baller

- Du har k like baller som skal farges, og du har n forskjellige farger. Hvor mange måter kan dette gjøres på?
- $\binom{n+k-1}{k}$.

Tabeller

- Det er 20 lag i the English Premier League. Hvor mange kamper er det i løpet av en sesong? Bruk en tabell!
- 
- $20 \times 20 - 20 = 380 = 20 \times 19$. Ordnet utvalg uten tilbakelegging.

To utvalg med tabell

- Det er tre jenter og to gutter i en klasse. Du velger to elever. Hva er sannsynligheten for at du velger en jente begge gangene?

	J1	J2	J3	G1	G2
J1					
J2					
J3					
G1					
G2					

- Premie til den som er flinkest i matematikk og en annerledes premie til den som er flinkest i engelsk. Ordnet, med tilbakelegging, $9/25$, $25 = 5^2$.
- Premie til den som er flinkest i matematikk og en lik premie til den som er flinkest i engelsk. Uordnet, med tilbakelegging, $6/15$, $15 = (6 \times 5)/(1 \times 2)$.
- Første- og annenpremie til de to som er flinkest i matematikk. Ordnet, uten tilbakelegging, $6/20$, $20 = 5 \times 4$.
- To like premier til de to som er flinkest i matematikk. Uordnet, uten tilbakelegging, $3/10$, $10 = (5 \times 4)/(1 \times 2)$.

To utvalg med tabell 2

- Jeg forklarte det slik mange ganger, men plutselig en dag forstod jeg at det var feil!
- Heldigvis var forklaringen på begynnelsen av foredraget mitt, og det var det som gjorde at jeg oppdaget feilen.
- I eksemplet med summen av to like terninger (uordnet), så vi at vi måtte ta hensyn til at det var en ikke-uniform modell. Det gjorde utregningene vanskeligere, så det lure var å late som om det var ordnet, for å få en uniform modell, og så å «glemme» ordningen.
- Det er viktig å forstå forskjellen på kombinatorikk og sannsynlighet. I kombinatorikk er svaret alltid et heltall. I sannsynlighet er svaret et tall mellom 0 og 1.

To utvalg med tabell 3

- Hvis vi ønsker å telle antallet måter vi kan velge to jenter på, så spiller det en rolle om utvalget er ordnet eller uordnet, men hvis vi ønsker å finne sannsynligheten for at vi velger to jenter, så spiller det ingen rolle om utvalget er ordnet eller uordnet.
- For uordnet med tilbakelegging er svaret *ikke* $6/15$. De 5 utfallene langs diagonalen har sannsynlighet $1/25$ hver, mens de 10 over diagonalen har sannsynlighet $2/25$ hver.
- Sannsynligheten for to jenter blir derfor $3 \cdot 1/25 + 3 \cdot 2/25 = 9/25$.
- I tilfellet uten tilbakelegging, blir den ingen forskjell, siden alt ligger over diagonalen. Derfor er de to svarene $6/20$ og $3/10$ like.
- Som dere ser, er dette et godt eksempel på at vi må være ydmyke overfor sannsynlighetsregning. Men det er dessto morsommere når vi forstår det!

Sannsynlighetsregningens historie

- Er matematikkhistorie nyttig for lærere og elever?
- Ja, hvis man velger de rette temaene.
- Sannsynlighetsregningens tidlige historie er et meget godt tema.
- Både Luca Pacioli (ca. 1447–1517) (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, 1494) og Gerolamo Cardano (1501—1576) (Liber de ludo aleae, Boken om tilfeldighetsspill, ca. 1564) løste enkle problemer i sannsynlighetsregning, men når de prøvde å løse vanskeligere problemer, gikk det ofte galt.

Sannsynlighetsregningens historie 2

- I 1654 stilte Antoine Gombaud Chevalier de Méré to spørsmål til Blaise Pascal (1623–1662). Problemene hadde blitt diskutert av Pacioli og Cardano, men de ble løst av Pascal i en brevveksling med Pierre de Fermat (1601-1665), og dette regnes som starten på sannsynlighetsregningen.
- Stemmer det at sannsynligheten for å få minst én sekser på fire kast med én terning er over 50 prosent, men at sannsynligheten for å to seksere minst én gang på 24 kast med to terninger er under 50 prosent?

Chevalier de Mérés første problem - To seksere

- Cardano mente han allerede hadde løst Chevalier de Mérés første problem:
- Siden sannsynligheten for å få en sekser er 1/6, mener Cardano at vi vil få en sekser hver 6. gang vi kaster. Derfor er det 50 % sjanse for å få en sekser på tre kast i følge Cardano.
- Siden sannsynligheten for å få to seksere på et kast med to terninger er 1/36, vil vi få to seksere hver 36. gang vi kaster to terninger. Derfor er det 50 % sjanse for å få to seksere på 18 kast i følge Cardano.

Chevalier de Mérés første problem - To seksere 2

- Chevalier de Méré mente at Cardano tok feil, og at man trengte å kaste fire ganger med én terning får å kunne vedde på å få minst én sekser.
- Dette er riktig, siden sannsynligheten for å ikke få noen sekser i fire kast er $(5/6)^4 \approx 0,48$, mens $(5/6)^3 \approx 0,58$.
- Hvis du kaster med to terninger, er det nå 36 mulige utfall, og Chevalier de Méré mente at han kunne bruke det samme forholdet $(4/6)$ som ved kast med én terning, og at man derfor kunne vente å få minst ett par seksere i $36 \times 4/6 = 24$ kast.
- Dette er feil siden $(35/36)^{24} \approx 0,51$ og $(35/36)^{25} \approx 0,49$.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill

- To personer spiller et spill som består av en rekke omganger, og i hver omgang har de like stor sjanse til å vinne. Vinneren er den som først har vunnet seks omganger. Hvordan skal potten fordeles hvis spillet må stoppes når spiller A har vunnet fem omganger og spiller B har vunnet to?
- Luca Pacioli mente at man skulle se på hvor mange spill hver hadde vunnet. Han mente at A burde få 5/7 av potten.
- Denne løsningen ble kritisert i 1556 av Niccolo Tartaglia (som løste tredjegradsligningen), som så på et spill som ble avbrutt etter bare en omgang. Er det rimelig at A får hele potten fordi han eller hun leder 1-0?

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 2

- Tartaglia sa at hvis A leder med tre poeng, som er halvparten av antallet som trengs for å vinne, så bør A få halvparten av B's innsats, så A får 3/4 og B 1/4 av potten.
- Er det rimelig at 5-2 og 3-0 behandles likt?
- Cardano forstod at man må se på hvor mange spill spillerne trenger å vinne, ikke hvor mange de har vunnet. Han prøvde å gjøre et induktivt argument, men fikk det ikke helt til.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 3

- Pascal antar at stillingen er 5-4 og at potten er 80 kroner. Hvis A vinner neste omgang, har A vunnet, men hvis B vinner omgangen, står de likt.
- Det er derfor rimelig at potten blir delt i to, at A får den ene halvparten, og at de deler den andre halvparten likt. Så A får 60 og B får 20.
- Anta nå at stillingen er 5-3. Igjen deler vi potten i to like deler. Hvis A vinner neste omgang vinner A spillet, og hvis B vinner neste omgang er stillingen 5-4. Men det er det tilfellet vi så på ovenfor! Vi deler derfor potten i to like deler, A får den ene delen, og den andre delen deles 3 til 1.
- Pascal gir så en komplett løsning som involverer Pascals trekant og induksjonsbevis.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 4

- Anta at A trenger å vinne r omganger og at B trenger å vinne s omganger. Sett $n = r + s - 1$, og anta at vi spiller n omganger. Da vil én, og bare én spiller ha vunnet. A skal da ha $\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k}/2^n$ av potten, og B skal ha $\sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k}/2^n$.
- Anta at $r = 1$ og $s = 2$. Da blir utfallene (A, A), (A, B), (B, A) og (B, B). A skal ha $(1 + 2)/4 = 3/4$ og B skal ha $1/4$.
- Jeg kunne ha sagt at utfallene var (A), (B, A) og (B, B), men da hadde utfallsrommet ikke vært uniformt.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 5

- Hvis $r = 2$ og $s = 5$, skal A ha

$$\left(\binom{6}{6}+\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\right)\Big/2^6$$

og B skal ha

$$\left(\binom{6}{6}+\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\right)\Big/2^6.$$

Tobarnsfamilieproblemet

- En mann har to barn. Du vet at det eldste barnet er en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?
- Du vet at minst ett av barna er en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?
- Du spør mannen om minst ett av barna er en gutt og han sier ja. Hva er sannsynligheten for begge er gutter?
- Du treffer mannen på gaten med et barn som var en gutt. Hva er sannsynligheten for begge er gutter?

Tobarnsfamilieproblemet 2

- Se på utfallsrommet av alle familier med to barn, $\{(G, G), (G, J), (J, G), (J, J))\}$. (Merk at nå bruker jeg ordnede par, for å få en uniform sannsynlighetsmodell.)
- Anta at vi sampler *familier* og spør om familien har minst én gutt. Hvis ja, blir de en del av utfallsrommet. Hvis nei, strykes de. Utfallsrommet blir $\{(GG), (J, G), (G, J)\}$ med uniform fordeling, og sannsynligheten for (G, G) er $1/3$.
- Anta at vi sampler *barn* fra tobarnsfamilier og ser om det er en gutt. Hvis ja, blir de en del av utfallsrommet. Hvis nei, strykes de. Utfallsrommet blir $\{(GG), (J, G), (G, J)\}$ men nå er det ikke en uniform fordeling, for (G, G) har dobbel så stor sannsynlighet som (J, G) og (G, J) for halvparten av disse familiene har blitt strøket. Så nå er sannsynligheten for (G, G) faktisk $1/2$.

Tobarnsfamilieproblemet 3

- Sett $q = P(\text{Minst én gutt} \mid \text{Han har } \{G, J\})$.
- Hvis du sampler familien, det vil si du spør faren eller på en annen måte har full informasjon om familien, så er $q = 1$.
- Hvis du sampler barnet, det vil si du observerer en gutt, uten å vite noe om det andre barnet, så er $q = 1/2$. Du vil gå glipp av halvparten av $\{G, J\}$ familiene, fordi halvparten av tiden ser du en jente.

Tobarnsfamilieproblemet 4

- Vi bruker Bayes' formel.

$$P(\{G,J\}) \mid \text{Minst én gutt}) = \frac{P(\text{Minst én gutt} \mid \{G,J\})P(\{G,J\})}{P(\text{Minst én gutt})}.$$

- $$P(\text{Minst én gutt}) = P(\text{Minst én gutt} \mid \{G,J\})P(\{G,J\}) \\ +P(\text{Minst én gutt} \mid \{G,G\})P(\{G,G\}).$$
- $P(\{G,J\} \mid \text{Minst én gutt}) = (q \times 1/2)/(q \times 1/2 + 1 \times 1/4) = 2q/(1+2q)$.
- Det følger at $P(\{G,G\} \mid \text{Minst én gutt}) = 1/(1+2q)$.
- $q = 1/2$ gir $P = 1/2$, og $q = 1$ gir $P = 1/3$.

Tobarnsfamilieproblemet 5

- Vi kan illustrere dette ved følgende variasjon. Anta at dere vet at jeg enten har ti gutter, eller en gutt og ni jenter. Dere ser meg sammen med en gutt. Er det da mest sannsynlig at det sitter ni gutter eller ni jenter hjemme?
- Hvis jeg har ni jenter vil du sannsynligvis se meg med en av jentene, så hvis du ser meg sammen med en gutt, er det sannsynligvis en av de ti guttene.

Tobarnsfamilieproblemet 6

- Det er en familie av problemer som alle har tilsvarende utregninger. Tobarnsfamilie, Monty Hall (bil/geit), tre fanger, tre kort (Bertrands boks paradoks) og Principle of Restricted Choice i bridge.

Takk for meg!