Universitetet i Oslo

Matematisk institutt

Mat4010

Sannsynlighetsparadokser

Skrevet av:

Eivind Hillesund
Henrik Seehusen
Fredrik Vänskä
Preben Lie

6. mai 2015

1. Innledning

Et paradoks er en påstand som tilsynelatende er en selvmotsigelse, men som likevel kan være korrekt. Vi skal her vurdere paradokser innenfor sannsynlighet og statistikk. Sannsynlighet er et matematisk felt, og vi forventer derfor at det skal gjelde rigorøse definisjoner og at det ikke skal være matematiske tvetydigheter. Vi kommer til å se at det ikke alltid er like åpenbart, og at det i noen tilfeller ikke finnes entydige svar. Det som også viser seg å være tilfellet er at lingvistikk og korrekt tolkning av formuleringer er særdeles viktig.

Det er flere årsaker til at paradokser er paradoksale. I mange tilfeller er det utilstrekkelige beskrivelser av problemet, men det er også tilfeller der det er gjort valg som ikke er åpenbare, og noen av paradoksene er kun overraskende konklusjoner. Vi kommer til å gå gjennom paradoksene tematisk for å illustrere de forskjellige fallgruvene.

2. Tobarnsparadokset

2.1. **Historisk bakgrunn.** Paradokset ble for første gang lagt frem av Martin Gardner i 1959. Han formulerte paradokset ved å presentere to problemer på følgende måte:

- Mr. Jones har to barn. Den eldste er en jente. Hva er sannsynligheten for at begge barnene er jenter?
- Mr. Smith har to barn. Minst én av dem er en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge barnene er gutter?

Gardner ga svaret til å være $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$ respektivt. Men senere gikk han med på at det siste spørsmålet kunne være tvetydig, og svaret var avhengig av hvordan spørsmålet ble formulert.

Vi legger derfor til en tredje situasjon.

- Mr. Anderson har to barn. Han viser oss en gutt, og vi antar at han har valgt tilfeldig blant de to barna. Hva er sannsynligheten for at han har to gutter?

2.2. **Tvetydighet.** Svaret på det første spørsmålet er ganske opplagt, hvis vi regner med at det alltid er like stor sannsynlighet for å få en gutt som det er for å få en jente (noe som ikke stemmer i praksis). Vi vet at det eldste barnet er en jente, men dette påvirker ikke sannsynligheten for at det neste barnet er en jente. Vi har dermed to muligheter; JJ eller JG, hvor J er jente og G er gutt. Dermed kan vi logisk konkludere med at sannsynligheten er $\frac{1}{2}$.

Intuitivt skulle man kanskje tro at svaret på det andre spørsmålet også ville være $\frac{1}{2}$. Men så enkelt er det ikke. I det andre spørsmålet vet vi ikke om den ene gutten er det eldste barnet eller det yngste. Det gjør at vi får flere muligheter, og ting blir mer komplisert. Vi starter med å ta for oss alle mulige kombinasjoner av to barn som vi regner med er like sannsynlige: JJ, JG, GJ og GG.

Siden vi vet at minst én av dem er en gutt, kan vi se bort fra JJ. Da står vi igjen med tre muligheter som alle er like sannsynlige, hvorav kun én av dem har to gutter. Svaret blir dermed $\frac{1}{3}$.

Vi beveger oss videre til tredje situasjon. Vi har sett en gutt, og vet at Mr. Anderson er faren. Da får vi igjen samme utfallsrom som for Mr. Smith: JG, GJ og GG. Problemet er at vi ikke vet om gutten vi ser er den eldste eller den yngste. Dette fører til at det siste alternativet blir delt i to; et der vi ser den eldste gutten og et der vi ser den yngste. Da får vi fire like sannsynlige alternativer, nemlig JG_1, G_1J, G_1G_2, G_2G_1, hvor G_1 er den gutten vi ser. Disse alternativene er alle like sannsynlige, og to av dem har to gutter, derfor vil sannsynligheten for at Mr. Anderson har to gutter være $\frac{1}{2}$.

Sannsynlighetene i de to siste tilfellene er ulike, men situasjonene til Mr. Smith og Mr. Anderson er i prinsippet like. Begge er familier med minst én gutt. Forskjellen mellom dem er at vi for Mr. Smith på forhånd visste at han hadde en gutt, mens vi for Mr. Anderson observerte en gutt og umiddelbart visste at denne gutten tilhørte Mr. Anderson.

2.3. **Analyse av problemet.** Vi ser at svaret vi får avhenger av om vi ser på barnenivå eller familienivå. På familienivå er utfallsrommet tobarnsfamilier og på barnenivå er utfallsrommet barn fra tobarnsfamilier. I Mr. Smiths situasjon så vi på familienivå og i Mr. Andersons tilfelle så vi på barnenivå.

I Mr. Smith sitt tilfelle består utfallsrommet av de fire like sannsynlige utfallene JJ, JG, GJ og GG, det gunstige utfallet er GG og de mulige utfallene er JG, GJ og GG, derfor er sannsynligheten en tredjedel. I Mr. Anderson sitt tilfelle må vi ta med hvilket barn som er eldst og hvilket som er yngst. Utfallsrommet vårt inneholder derfor: Eldste og yngste gutt fra GG, eldste og yngste jente fra JJ, Gutt og jente fra JG og gutt og jente fra GJ. De gunstige er eldste og yngste gutt fra GG. De mulige utfallene er gutt fra JG, gutt fra GJ, og eldste og yngste gutt fra GG. Det er altså 2 gunstige og 4 mulige, så sannsynligheten er en halv.

Hvis vi tar utganspunktet i familiene, får vi $P(GG|\text{minst én } G) = \frac{1}{3}$, men hvis vi tar utgangspunkt i den ene observerte gutten, altså barnenivå, vil vi få at $P(GG|\text{observert } G) = \frac{1}{2}$. Ut fra dette kan vi se at paradokset ikke kommer fra en matematisk feiltolkning. Problemet ligger i språket. Det var i utgangspunktet ikke spesifisert i spørsmålet hvordan vi finner ut at Mr. Smith har en gutt, og dermed var det uklart hvordan vi skulle gå frem for å løse oppgaven. Det problemet ble enkelt unngått ved å introdusere Mr. Anderson, som egentlig er samme situasjon som Mr. Smith, med en annen formulering.

Marilyn vos Savant gjennomførte en undersøkelse i 1996, der hun undersøkte hvor mange tobarnsfamilier hadde to gutter, gitt at familiene hadde minst én gutt. Av de 17946 deltagende familiene, hadde 35.9% to gutter. Her kan vi se at om vi ser på familienivå, blir sannsynligheten nær det vi forventet, nemlig $\frac{1}{3}$.

Et problem med å se på barnenivå er at det har blitt gjort et valg som vi ikke hatt kontroll over. Vi antok tidligere at Mr. Anderson valgte tilfeldig hvilket barn han viste oss, men det kan tenkes situasjoner der det ikke er tilfellet. Vi definerer

$$q = P(\text{observert } G|GJ) = P(\text{observert } G|JG)$$

der G er at man ser en gutt. q er altså sannsynligheten for at faren velger å ta med seg en gutt, gitt at han har både en gutt og en jente. $P(G|JJ)$ er opplagt null, siden man ikke kan plukke ut en gutt blant to jenter. Hvis vi bruker Bayes setning for å finne sannsynligheten for at familien har to gutter, gitt at vi ser en gutt, får vi:

$$\begin{aligned}
&P(GG|G) \\
&\quad = \frac{P(G|GG)P(GG)}{P(G|GG)P(GG) + P(G|JG)P(JG) + P(G|GJ)P(GJ)} \\
&\quad = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{q}{4} + \frac{q}{4}} \\
&\quad = \frac{1}{1+2q}
\end{aligned}$$

Hvis $q = 0$ velger han aldri gutt, hvis ikke han må. Da får vi at $P(GG|G) = 1$.

Hvis $q = 1$ velger han alltid gutt hvis han kan. Da får vi at $P(GG|G) = \frac{1}{3}$ fordi det eneste vi vet når vi ser en gutt, er at faren ikke har to jenter.

Hvis $q = \frac{1}{2}$ er det like sannsynlig at faren velger gutt som at han velger jente. Da får vi at $P(GG|G) = \frac{1}{2}$ fordi halvparten av mulighetene som fører til at vi ser en gutt, vil bety at faren har to gutter, som forklart tidligere.

Det andre problemet får løsningen Gardner presenterte,

$$P(G|GG) = \frac{1}{3},$$

kun dersom vi definerer $q = 1$. Den mer intuitive løsningen, der sannsynligheten for to gutter er $\frac{1}{2}$ får vi om vi velger $q = \frac{1}{2}$, som indikerer at det er tilfeldig om han tar med seg gutt eller jente.

3. Monty Hall-problemet

Monty Hall-problemet tar utgangspunkt i et gameshow med tre dører. Bak en dør er hovedpremien, en bil, og bak de to andre dørene er det geiter. Deltakeren velger en dør. Deretter åpner verten en av dørene det venter en geit bak og deltakeren får anledning til å bytte til den siste døren. Verten kan altså ikke åpne døren som deltakeren har valgt og ikke åpne døren som inneholder hovedpremien. Spørsmålet er så om deltakeren øker vinnersjansene sine ved å bytte?

Problemet regnes som et sannsynlighetsparadoks fordi det virker intuitivt at sannsynligheten skal være lik, men svaret er at man fordobler vinnersjansen sine ved å bytte dør. Antakelsen man må ta for å trekke denne konklusjonen er at verten tar et helt tilfeldig valg dersom han har et valg.

3.1. **Beskrivelse av paradokset.** La oss først undersøke at denne konklusjonen stemmer. La oss si at deltakeren velger dør 3. Sannsynligheten er $\frac{1}{3}$ for at dør 1 inneholder hovedpremien. I så fall vil verten åpne dør 2 og deltakeren vil tjene på å bytte. Sannsynligheten er også $\frac{1}{3}$ for at dør 2 inneholder hovedpremien. I så fall åpner verten dør 1 og deltakeren tjener på å bytte. Sannsynligheten er $\frac{1}{3}$ for at dør 3 er riktig, og uansett hvilken dør verten åpner vil deltakeren tape på å bytte. Dermed er vinnersjansen $\frac{2}{3}$ om deltakeren bytter.

Grunnen til at de fleste intuitivt tror sannsynligheten skal være det samme er at man tenker at sannsynlighetsfordelingen fremdeles er uniform. Sannheten er at sannsynligheten for at døren man først valgte skjuler gevinsten ikke blir påvirket mens sannsynligheten for at den siste døren inneholder førstepremien blir doblet. Grunnen til dette er at verten ikke kan velge å avsløre at døren man først valgte ikke inneholder førstegevinsten. Dermed får man ingen ny informasjon som kan endre sannsynligheten for at døren man valgte først er riktig.

3.2. **Analyse av paradokset.** Sannsynligheten på $\frac{2}{3}$ kan endres om vi tar i betraktning at verten har et valg i tilfellene der deltakeren velger riktig dør til å begynne med og vi ikke antar at verten velger tilfeldig. Om verten ikke tar et tilfeldig valg og deltakeren er klar over at verten ikke tar et tilfeldig valg vil det påvirke sannsynligheten og vi trenger å bruke Bayes teorem:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

La oss fremdeles anta at deltakeren begynner med å velge dør 3. Vi definerer hendelsene:

V_i: Verten åpner dør i.

G_i: Dør i inneholder hovedpremien.

Vi antar at $P(V_1|G_3) = q$ som medfører $P(V_2|G_3) = 1 - q$. La oss først anta at verten åpner dør 1 og regne ut $P(G_3|V_1)$. Vi regner altså vinnersjansene om deltakeren ikke bytter.

$$P(G_3|V_1) = \frac{P(V_1|G_3)P(G_3)}{P(V_1)}$$

der:

$$\begin{aligned} P(V_1) &= P(V_1 \cap G_1) + P(V_1 \cap G2) + P(V_1 \cap G_3) \\ &= 0 + P(V_1|G_2)P(G_2) + P(V_1|G_3)P(G_3) \end{aligned}$$

så:

$$P(G_3|V_1) = \frac{P(V_1|G_3)P(G_3)}{P(V_1|G_2)P(G_2) + P(V_1|G_3)P(G_3)}$$

$$= \frac{q \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + q \cdot \frac{1}{3}} = \frac{q}{1+q}$$

Antar vi $q = \frac{1}{2}$ får vi som vi så tidligere $\frac{1}{3}$ sannsynlighet for seier ved å ikke bytte. Er dermed $q = 1$ blir sannsynligheten $\frac{1}{2}$ og det er likegyldig om man bytter. Så om man vet at verten alltid åpner dør 1 om den er feil blir dør 2 og 3 like sannsynlige om dør 1 åpnes. Er derimot $q = 1$ blir $P(G_3|V_1)$ lik 0, fordi verten garantert ville åpnet dør 2 dersom dør 3 var riktig.

Konklusjonen blir at selv når man tar med i betraktning at verten ikke plukker tilfeldig vil man aldri redusere vinnersjansene sine ved å bytte. I verste fall vil sannsynligheten være uendret.

4. Tre fanger-problemet

Monty Hall-problemet og tre fanger-problemet er nært knyttet til hverandre. Tre fanger-problemet kan formuleres som følger:

4.1. **Paradokset.** Det er tre fanger. En av dem blir tilfeldig plukket til å bli frisatt mens de to andre vil bli henrettet. Fange A ber vokteren fortelle ham navnet på en fange som skal henrettes. Han sier: "Om B skal frifinnes, si C, om C skal frifinnes, si B og om jeg skal frifinnes, slå kron mynt om hvem du sier". Vakten forteller ham at B skal henrettes. A er glad fordi han mener at sannsynligheten for at han settes fri har økt fra $\frac{1}{3}$ til $\frac{1}{2}$. Han forteller dette til fange C. Fange C er enda lykkeligere for han mener at A sin sannsynlighet fremdeles er $\frac{1}{3}$ mens hans egen sannsynlighet er $\frac{2}{3}$. Hvem har rett?

4.2. **Forklaring.** Svaret er at fange C har rett og utregningen blir helt tilsvarende den for Monty Hall. Grunnen til at sannsynlighetsfordelingen ikke er uniform etter at vakten forteller dem at B skal henrettes er at fange A ikke får noen ny informasjon som endrer hans sannsynlighet. Han vet at uansett hvem som skal frifinnes skal en av de andre henrettes og siden vi har antatt at det er like sannsynlig at vakten sier B eller C om A skal frifinnes får ikke A noen ny informasjon. Hadde vakten hatt muligheten til å si at A skulle henrettes, men sa B, ville A fått ny informasjon som hadde ført til økt sannsynlighet.

Grunnen til at C sin sannsynlighet øker er nemlig at vakten kunne sagt at C skulle henrettes og det at han sa at B skulle henrettes dobler C sin mulighet til å overleve siden det kun var de to vakten kunne si og de opprinnelig var like sannsynlige. Dette er tilsvarende som i Monty Hall-problemet der sannsynligheten for at den valgte døren inneholder hovedgevinsten ikke forandrer seg når verten åpner en dør, men sannsynligheten for at den siste døren inneholder hovedpremien blir doblet.

4.3. **Sammenligning med Monty Hall-problemet.** Monty Hall-paradokset og tre fanger-paradokset er ganske like i utforming. Én dør inneholder premie, og én fange skal frifinnes. Spørsmålet er så hvilken dør som inneholder premien, og hvilken fange som skal frifinnes, og det er her paradoksene begynner å skille seg fra hverandre. Det gjøres nemlig tilsammen opp til fire valg i Monty-Hall, men det gjøres kun potensielt tre valg i tre fanger-paradokset.

Tabell 1. Oversikt over valg.

Valg	Monty-Hall	Tre fanger
1	Plassering av premie	Fange som skal frifinnes
2	Deltagerens valg av dør	Hvilken fange som spør
3	Verten åpner en dør	Fangevokteren nevner en fange
4	Deltageren kan bytte dør	

Situasjonen i de to problemene er i utgangspunktet helt identisk, og dermed blir matematikken også lik. Intuitivt har svaret til fangevokteren og den påfølgende endrede sannsynligheten for frifinnelse ingenting å si, siden valget om hvilken fange som skal frifinnes allerede er tatt. Tilsvarende ville ikke programlederens avsløring av en gal dør hatt noe å si for utfallet om ikke deltageren kunne gjort et nytt valg. Hvordan kan vi så forklare at sannsynligheten endrer seg, som vi har vist at den gjør, om utfallet er låst? Årsaken til at sannsyligheten endrer seg, selv om utfallet er det samme, er at verten gjør et valg. Det valget gir observatøren ekstra informasjon, slik at vi kan forutse utfallet. I Monty-Hall-problemet kan deltageren gjøre et fjerde valg, der han benytter seg av den endrede sannsynligheten til å bytte dør og øke vinnersjansen sin. En parallell til tre fanger-problemet er om det skulle være tipping om hvem som frifinnes og bookmakeren godtar at tipperne kan endre valgene sine. Fangen som skal frifinnes er den samme som den alltid har vært, men sannsynlighetsfordelingen mellom de tre fangene er ikke lenger uniform, og det kan derfor lønne seg å bytte, slik at situasjonen blir akkurat lik den for Monty Hall.

5. To konvolutter-paradokset

5.1. **Presentasjon av paradokset.** To konvolutter-paradokset, også kjent som utvekslingsparadokset , lyder som følgende. Det finnes to identiske konvolutter som begge inneholder penger, den ene dobbelt så mye som den andre. Du velger en konvolutt, men får lov til å bytte til den andre. Spørsmålet er om det lønner seg å bytte. Intuitivt ligger det ingen gevinst i å bytte, men la oss formulere problemet ved hjelp av forventningsverdien.

Hvis vi velger en konvolutt A, har den andre konvolutten B enten dobbel eller halv verdi med like stor sannsynlighet. Da kan vi beregne forventningsverdien av å bytte konvolutt på følgende måte:

$$E(B) = \frac{1}{2} \cdot 2A + \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{2} = \frac{5}{4}A$$

Her betegner A verdien i den første konvolutten og B verdien i den andre konvolutten. Vi ser at forventningsverdien blir større enn verdien i A og dermed lønner det seg å bytte.Videre kan vi da tenke oss at vi har valgt konvolutt B med verdi $B = \frac{5}{4}A$ og den andre konvolutten vil nå ha enten dobbel eller halv verdi av den valgte konvolutten B. Vi kan nå gjøre en ny kalkulasjon av forventningsverdien og konkludere med at vi må bytte igjen og igjen og at forventingsverdien går mot uendelig.

Dette er åpenbart galt, så problemet i paradokset er hvor feilen i argumentasjonen og beregningen av forventningsverdien kommer fra?

5.2. **Løsning.** Det er sant at hvis vi velger en konvolutt inneholder den andre konvolutten dobbel eller halvparten av verdien til den balgte konvolutten. Men det har det blitt en feil i formuleringen av regnestykket av forventningsverdien. Problemet oppstår når vi definerer verdien til den førstvalgte konvolutten som A uavhengig av om den andre konvolutten har høyere eller lavere verdi. Disse to er forskjellige tilfeller og verdien av A er forskjellig avhengig av situasjonen.

Beregningen av forventningsverdien av å bytte konvolutt er mer komplisert enn presentert i paradoksformuleringen. Når vi tar hensyn til at verdien i den førstvalgte konvolutten er dobbelt så stor eller halvparten av den vi kan bytte til, blir forventningsverdien følgende:

$$E(B) = E(B|A < B)P(A < B) + E(B|A > B)P(A > B)$$

$$= 2X\frac{1}{2} + X\frac{1}{2} = \frac{3}{2}X$$

Her er X verdien av konvolutten med lavere verdi. Da har de to konvoluttene verdiene X og $2X$. Forventningsverdien for verdien i konvolutt B er $E(B) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}2X = \frac{3}{2}X$ som stemmer også for konvolutt A. Dette stemmer også med den intuitive løsningen for paradokset, nemlig at vi ikke kan avgjøre om vi tjener på å bytte.

6. St. Petersburg-paradokset

6.1. Historisk bakgrunn og presentasjon av paradokset. Paradokset ble formulert i 1713 av Nicolaus Bernoulli, fetteren til det mer kjente medlemmet av Bernoullifamilien, Daniel Bernoulli. Paradokset er navngitt etter akademiet Daniel Bernoulli var ansatt ved da han presenterte sine argumenter for å løse paradokset.

Paradokset lyder som følger: et kasino tilbyr et spill der gevinsten er gitt av kast av mynt og krone. Potten begynner starter på 2 kroner og blir doblet for hver mynt som blir kastet. Ved den første krone er spillet slutt og spilleren vinner summen i potten. Spørsmålet er, hva er en fornuftig pris å betale for å spille dette spillet?

For å svare på dette, må vi se på forventningsverdien til spillet. Hvis vi betaler litt under forventningsverdien, kommer vi til å vinne i det lange løp. Sannsynligheten for at spillet tar slutt på første kast er $\frac{1}{2}$ og spilleren vinner 2 kroner. Sannsynligheten for å vinne 4 kroner er $\frac{1}{4}$, sannsynligheten for å vinne 8 kroner er $\frac{1}{8}$ osv.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{1}{16}\cdot 16 + \cdots \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \\ &= \infty \end{aligned}$$

Den totale forventningsverdien blir uendelig. Den matematiske konklusjonen er at man må spille for hvilken som helst pris uendelig mange ganger. Paradokset i dette er at det er få som er villige til å betale mer enn 30 kroner for å delta i spillet. Det virker ikke fornuftig å betale mer.

For å forklare paradokset kan vi ta i betraktning problemet med uendelighet. Ethvert kasino har ikke uendelig valuta å gi som premie og en som ønsker å spille har ikke uendelig mange penger å bruke for å spille uendelig mange ganger. To fremgangsmåter for å løse paradokset er å begrense enten midlene spilleren har eller maksimal premie kasinoet tillater.

6.2. **Forventet nytteteori.** Daniel Bernoullis løsning til problemet er å begrense spillerens midler. Ved å utrykke gevinsten med en logaritmefunksjon kan det vises at forventningsverdien blir endelig. I formelen har vi w for spillerens kapital og c er prisen for å spille. For enhver w kan vi velge en c slik at forventingen blir positiv og konvergerer til en endelig verdi.

$$E(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(w + 2^{k-1} - c) - \ln(w))}{2^k} < \infty$$

Basert på denne funksjonen skal en millionær være villig å betale opp til 10,94 kroner for å spille. Tilsvarende vil en som har 1000 kroner å spille for sette grensen ved 5,94 kroner.

6.3. **Endelig bank.** På den andre siden kan vi betrakte kasinoets midler som begrenset. Da kan ikke gevinsten bli uendelig stor. Dermed blir forventingsverdien en endelig sum. For å lage en matematisk modell bruker vi gulvfunksjonen $L = \lfloor \log_2(W) \rfloor$, hvor W er kasinoets midler, og L er det største antall kast som gir full utbetaling. Da kan vi bruke forventningsverdien som en fornuftig maksimal pris for å spille spillet. Forventningsverdien blir da:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \min(2^k, W) \\ &= \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k \; + \sum_{k=L+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot W \\ &= L \; + \; \frac{W}{2^L} \end{aligned}$$

Her antar vi at dersom spilleren skulle vinne mer enn W, får spilleren alt av kasinoets midler. Eksempler:

- Spill med en kompis med $W = 100$ kr. Forventningsverdien blir 6,56 kr.
- Kasinoet har en million kr. Da blir forventningsverdien 19,91 kr.

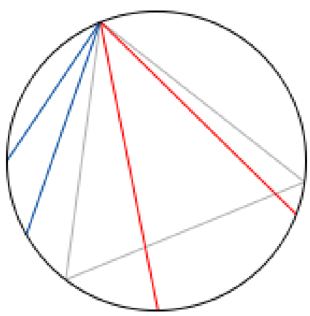
- Verdens BNP er \$ 54,3 billioner. Forventningsverdien blir da \$ 45,54.

Disse to fremgangsmåtene gir mening, men det matematiske paradokset er ikke besvart ved å redusere problemet til endelige tilfeller. Heldigvis har ingen kasinoer eller personer uendelig midler, så dette paradokset blir ikke et problem utenfor matematikkens verden.

7. Bertrands Paradox

Bertrands paradox ble formulert av matematikeren Joseph Bertrand i 1889 i boken *Calcul des probabilitiés* og lyder som følger: Det er en likesidet trekant innskrevet i en sirkel. En tilfeldig korde blir valgt. Hva er sannsynligheten for at korden er lenger enn kanten til trekanten? I resten av denne seksjonen vil korde referere til en linje mellom to punkter på sirkelen, og kant vil referere til sidekanten til den innskrevne trekanten. Dette virker som et enkelt spørsmål.

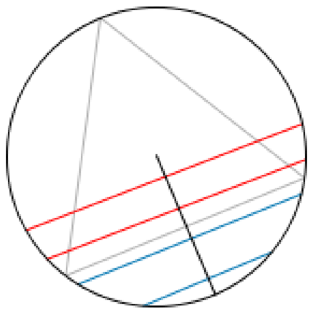
7.1. **Metode 1.** Vi velger et tilfeldig punkt på sirkelen og roterer trekanten slik at et av hjørnene sammenfaller med punktet, slik figuren viser. Så trekker vi en korde fra det punktet til alle andre punkter på resten av sirkelen. Symmetri gir at sirkelen blir delt i tre seksjoner av trekanten, og vi ser i figur 1 at kordene vi trekker blir lenger enn kanten i en av de tre seksjonene. Sannsynligheten for at den tilfeldige korden er lenger enn kanten er dermed $\frac{1}{3}$.



Figur 1. Metode 1 for å velge tilfeldige korder.

Dette virker som en enkelt og åpenbar løsning på problemet, men det er ikke fullt så enkelt. Det finnes nemlig flere løsninger på problemet, som gir forskjellige resultater.

7.2. **Metode 2.** Vi velger en tilfeldig radius i sirkelen, og roterer så trekanten slik at at en av kantene står vinkelrett på radien. Så velger vi et tilfeldig punkt på radien, og bruker det punktet som midtpunkt for en korde. Hvis korden er nærmere midten av sirkelen enn kanten er korden lenger, og tilsvarende er korden kortere enn kanten om korden er lenger vekk fra midtpunktet. Dette gir at halvparten av kordene er lenger enn kanten.



FIGUR 2. Metode 2 for å velge tilfeldige korder.

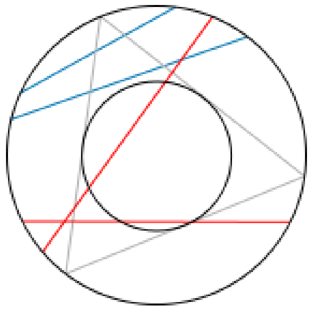
7.3. **Metode 3.** Vi tegner nå en innskrevet sirkel i trekanten, og observerer at kordene som tangerer den indre sirkelen er like lange som kantene. Om vi så velger et tilfeldig punkt innenfor den store sirkelen og bruker det punktet som midtpunkt for en korde vil alle punkter innenfor den lille sirkelen resultere i linjer lenger enn kanten, og alle punkter utenfor den lille sirkelen fører til at kordene blir kortere.

Vi kan dermed sammenligne arealene til de to områdene, for å finne sannsynligheten for at et tilfeldig punkt med sin tilhørende korde er lenger enn kanten.

$$\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

7.4. **Diskusjon.** Et tilsynelatende enkelt spørsmål har vi nå vist at har tre gyldige og forskjellige løsninger.

Det er tydelig at vi for å få et entydig svar må være mer presise i formuleringen av spørsmålet, slik at måten vi trekker korden på er beskrevet. Det vi likevel kan gjøre er å undersøke hvordan fordelingen av korder vil se ut for de tre metodene, for å vurdere om de er likeverdige.



FIGUR 3. Metode 3 for å velge tilfeldige korder.

Ettersom Bertrand i sin formulering av paradokset ikke spesifiserte posisjonen eller størrelsen til sirkelen, mente Edwin Jaynes i artikkelen *The Well-Posed Problem* fra 1973 at løsningen må være uavhengig av begge faktorene. Om vi nå tenker oss at sirklene vi har behandlet ovenfor alle har radius 1, kan vi konstruere korder på samme måter i sirkler med radius 2. Om vi så så velger en sirkel med radius 1 med en tilfeldig posisjon innenfor den større sirkelen må fordelingen av korder være lik uansett posisjon og størrelse til den mindre sirkelen. Det viser seg at metode 1 ikke tilfredsstiller uavhengighetskravet til hverken posisjon eller størrelse, metode 2 er uavhengig av både størrelse og posisjon, og metode 3 er kun uavhengig av størrelse. Det kan derfor kan argumenteres for at metode 2 er den bedre løsningen.

8. Simpsons paradoks

Simpsons paradoks går ut på at man kan se en tendens i en mengde betingede sannsynligheter, men en annen tendens på det samlede resultatet. Om vi for eksempel antar en hendelse A og disjunkte hendelser B_i som tilsammen har sannsynlighet 1 så kan det være tilfellet at:

$$P(A|B_i) < P(A^C|B_i)$$

for alle verdier av i, men allikevel er

$$P(A) > P(A^C).$$

8.1. **Kjønnsdiskriminering ved ansettelser.** En bedrift blir etterforsket for anklagelser om brudd på likestillingsloven. Det er blitt hevdet at det er lettere for menn enn for kvinner å bli ansatt i bedriften. Etterforskerne går igjennom ansettelsene over de siste ti årene, og finner at kun 30% av kvinnelige søkere blir ansatt, mens 60% av mennene som søker blir ansatt. Etterforskerne går deretter detaljene nærmere etter i sømmene.

Det er to ulike stillinger i denne jobben, som vi kaller A og B. Etterforskerne fant at:

Av 40 kvinnelige søkere på stilling A ble 30 ansatt.

Av 100 mannlige søkere på stilling A ble 70 ansatt.

Av 90 kvinnelige søkere på stilling B ble 9 ansatt.

Av 20 mannlige søkere på stilling B ble 2 ansatt.

Vi innfører hendelsene:

S_A: Søkeren søker på stilling A.

S_B: Søkeren søker på stilling B.

K: Søkeren er kvinne.

M: Søkeren er mann.

A: Søkeren blir ansatt.

Dette gir oss sannsynlighetene:

$$P(A|K \cap S_A) = \frac{30}{40} = 0.75 = 75\%$$

$$P(A|M \cap S_A) = \frac{70}{100} = 0.7 = 70\%$$

$$P(A|K \cap S_B) = \frac{9}{90} = 0.1 = 10\%$$

$$P(A|M \cap S_B) = \frac{2}{20} = 0.1 = 10\%$$

$$P(A|K) = \frac{30+9}{40+90} = \frac{39}{130} = 0.3 = 30\%$$

$$P(A|M) = \frac{70+2}{100+20} = \frac{72}{120} = 0.6 = 60\%$$

Dette gir oss følgende diagram:

TABELL 2. Oversikt over ansettelsesprosent.

Stilling	Kvinne	Mann
A	75%	70%
B	10%	10%
Tilsammen	30%	60%

Ser man på de to stillingene hver for seg vil man kunne konkludere med at det er meget liten forskjell mellom kjønnene, og den lille forskjellen som er, går i kvinnenes fordel. Ser man kun på de samlede tallene ville man konkludert med at det er kjønnsforskjeller og brudd på likestillingsloven.

Dette er et godt eksempel på at korrelasjon ikke beviser kausalitet. At det å være kvinne og det å bli ansatt ikke er uavhengige hendelser betyr i dette eksempelet ikke at det skjer kjønnsdiskriminering. Den negative korrelasjonen mellom å være kvinne og å bli ansatt skyldes to andre korrelasjoner: Det er en positiv korrelasjonen mellom å være kvinne og å søke på stilling B, som vi kan se av at:

$$P(K) = \frac{130}{120+130} = \frac{13}{25} = 52\%$$

$$P(K|S_B) = \frac{90}{20+90} = \frac{9}{11} = 81.8\%$$

Den er også en negativ korrelasjon mellom å søke på stilling B og å bli ansatt:

$$P(A) = \frac{30+70+9+2}{40+100+90+20} = \frac{111}{250} = 44.4\%$$

$$P(A|S_B) = \frac{9+2}{90+20} = \frac{1}{10} = 10\%$$

Dermed er det disse to korrelasjonene som forårsaker at lavere andel av søkende kvinner ansettes. Det er mer nærliggende å konkludere med at kvinner er mer ambisiøse og i større grad enn menn søker på stillinger det er vanskelig å komme inn på enn at bedriften foretrekker å ansette menn.

I dette tilfellet er det de betingede sannsynligheten man må legge vekt på når man avgjør hvorvidt påstanden om lovbrudd stemmer.

Som regel er det mest fornuftig å se på disse sannsynlighetene, men i noen tilfeller bør man se på de samlede sannsynlighetene i stedet.

8.2. **Lav fødselsvekt-paradokset.** Lav fødselsvekt-paradokset er et eksempel på et Simpsons-paradoks som har fått et eget navn. Paradokset omhandler sammenhengen mellom spedbarnsdød og røyking under svangerskapet. Spedbarnene deles inn i to grupper: normal- og undervektige.

Undersøkelser viser at normalvektige barn av mødre som røyker tobakk i svangerskapet har like stor sannsynlighet for å overleve som normalvektige barn av mødre som ikke røyker i svangerskapet. Undervektige barn av mødre som røyker i svangerskapet har større sannsynlighet for å overleve enn undervektige barn av mødre som ikke røyker. Ser man derimot på alle barn hvis mødre røyker i svangerskapet er sannsynligheten for barnedødelighet større enn blant barn av mødre som ikke røyker.

Igjen ligger forklaringen i at det er forskjell i størrelsen på gruppene. Mødre som røyker i svangerskapet har større sannsynlighet for å føde undervektige barn enn mødre som ikke røyker og det er en betydelig positiv relasjon mellom undervekt og spedbarnsdød.

Det som gjør at man i dette tilfellet kan konkludere med at røyking av tobakk er helseskadelig for fosteret, til tross for at de betingede sannsynlighetene sier det motsatte, er at tobakkrøyken er en del av årssakssammenhengen. Tobakkrøyk forårsaker undervekt og undervektige barn har høyere spedbarnsdødelighet enn normalvektige. Dermed kan man si at tobakkrøyk i svangerskapet øker sannsynligheten for spedbarnsdød.

Grunnen til at man i ansettelseseksempelet ikke kunne konkludere med kjønnsdiskriminering, er at forskjellen i ansettelsesrate er forårsaket av at flere kvinner søker på stilling B, som har færre posisjoner. Dette resulterer i en lavere total ansettelsesrate for kvinner, som ikke er forårsaket av diskriminering. I noen tilfeller kan det være mer komplisert å finne årsakssammenhengene som medfører forskjellen mellom den samlede tendensen og tendensen innad i hver gruppe.

8.3. **Lærere med svake elever.** Det har vært diskutert å gi lærere provisjonsbasert lønn, der elevenes prestasjoner påvirker lærernes lønn. Lærere skal dermed få enda høyere motivasjon for å undervise godt, slik at elevene får gode resultater. Dette kan ha sine svakheter.

Et klassetrinn har to klasser, med forskjellig andel elever med lærevansker. Skolen satte opp en tabell for å få oversikt over resultatene til elevene i de to klassene.

TABELL 3. Oversikt over elev- og karakterfordeling.

	Klasse A		Klasse B	
Elevgruppe	Lærevansker	Andre	Lærevansker	Andre
Fordeling i prosent	10	90	30	70
Snittkarakter gruppe	3,0	4,0	3,1	4,1
Snittkarakter klasse	3,9		3,8	

Det er fra tabellen åpenbart at læreren i klasse B oppnår best resultater, selv om den totale snittkarakteren er lavere. Det kommer også klart frem hvorfor klasse B har lavere snittkarakter, siden andelen elever med lærevansker er så mye høyere. Dette siste eksempelet trenger ikke noen dypere forklaring slik de to første trengte, siden all informasjonen blir presentert med en gang. Istedenfor å gjøre en feilaktig konklusjon basert kun på gjennomsnittskarakterene så vi på de underliggende årsakene og dermed er forskjellen i gjennomsnittskarakter forklart fra begynnelsen.

8.4. **Oppsummering av Simpsons paradoks.** Simpsons paradoks illustrerer viktigheten av å ikke eliminere relevante variabler om man skal trekke konklusjoner om kausalitet. Det illustrerer også hvor lett det er å bruke statistikk til å lyve med sannheten, ved å fortelle kun deler av sannheten kan man gi helt galt inntrykk. Hadde man i det første eksempelet kun nevnt at 30 prosent av kvinnelige søkere og 60 prosent av mannlige søkere ble ansatt ville det gitt inntrykk av at det foregår kjønnsdiskriminering selv om det ikke stemmer.

Disse problemstillingene er aktuelle på grunn av statistikkens viktige rolle i samfunnet. Statistikk blir ofte aktivt brukt i forskning, i rettsaker og av politikere for å fremme sin agenda. Å kunne tolke statistikken riktig er derfor viktig for å kunne gjøre informerte valg.

9. Berksons paradoks

Berksons paradoks sier at to uavhengige hendelser A og B, kan bli avhengige om vi ser på et gitt utfallsrom.

Hvis vi antar at $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ og $P(A|B) = P(A)$, så vil både A og B skje halvparten av tilfellene, helt uavhengig av hverandre. Da får vi at

Tabell 4. Utfallsrommet.

	A	$\bar{A}$
B	A,B	$\bar{A}$,B
$\bar{B}$	A, $\bar{B}$	$\bar{A}$,$\bar{B}$

Hvis vi nå velger å se på området der minst én av A og B skjer, altså $A \cup B$, så vil det nye utfallsromet vårt bestå av tre av tilfellene i tabellen over. Vi ser at sannsynligheten for A i det nye utfallsrommet er $P(A|A \cup B) = \frac{2}{3} > P(A)$. Det som nå har skjedd er at A og B har blitt avhengige av hverandre.

Berkson brukte et sykehus som eksempel. Hvis en pasient blir innlagt for en annen sykdom enn sykdom A, vil sannsynligheten øke for at han er innlagt for sykdom B. Dette skjer fordi vi har eliminert en sykdom og vi vet at noe må være galt med ham; han er tross alt innlagt.

Berksons paradoks er ikke et ordentlig paradoks, siden det ikke er noen tilsynelatende selvmotsigelse, men det viser at to uavhengige hendelser, A og B, kan bli avhengige dersom vi får mer informasjon om hvordan utfallsrommet ser ut.

10. Konklusjon

En gjenganger i flere av paradoksene er at resultatene kan bli merkelige om vi gjør antagelser det ikke er grunnlag for, eller om vi ikke ser nøye nok på hvordan antagelser i problemet er gjort. I tobarnsproblemet der vi så etter familier med to gutter observerte vi at det ble forskjellig resultat om vi valgte familiene på familienivå enn om vi så på barnenivå. Vi så i tillegg, både for tobarnsparadokset, Monty-Hall og tre fanger-paradokset at det er viktig å være klar over valg som er tatt av en tredjepart. Vi definerte en q for å indikere hvilket grunnlag tredjeparten bruker for å gjøre valg, og forskjellige verdier for q gir forskjellige resultater. I spørsmålene er ofte disse verdiene for q enten ikke oppgitt, eller kun antydet gjennom teksten. Det blir så leserens oppgave å tilegne q en verdi slik at oppgaven kan løses riktig.

I Bertrands paradoks viste vi tre forskjellige metoder å løse problemet med, som alle gav forskjellige resultater. Det blir så et vurderingsspørsmål om den ene metoden er bedre enn de andre, men basert på informasjonen gitt i oppgaven er de i prinsippet gyldige alle tre.

I løsnignen av To konvolutter-paradokset gjorde vi en antagelse som i utgangspuntket virket fornuftig, men som i ettertid viste seg å være ganske dum. Antagelsen var å bruke en variabel A for den andre konvolutten uavhengig av om den valgte konvolutten B hadde mindre eller høyere verdi enn A, men det at en variabel har to ulike verdier samtidig er en umulighet. St. Petersburg-paradokset er paradoksalt fordi det blir en kollisjon mellom matematikk og virkelighet. Det lønner seg på sikt å spille for enhver pris, men hverken spiller eller kasino har uendelige midler, og den uendelige forventningsverdien kan derfor ikke videreføres til praktisk bruk.

Paradoksene vi har sett på er paradoksale av flere årsaker, felles for alle er at man må være forsiktig med egne antagelser, man må være klar over valg andre har gjort, språket må tolkes korrekt og i noen tilfeller er det ikke entydige løsninger.