UiO : Universitetet i Oslo

Kul geometri - overflateareal og volum av kuler

Helmer Aslaksen

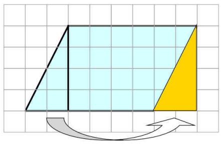
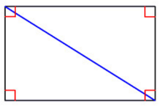
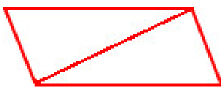
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning/Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

helmer.aslaksen@gmail.com
www.math.nus.edu.sg/aslaksen/

Regulære *n*-kanter

- Hva kaller vi en firkant med like lange sider?
- Rombe, ikke kvadrat!
- Hva kaller vi en firkant med like store vinkler?
- Rektangel, kommer fra rectangulus, som betyr rett vinkel, siden de fire vinklene alle er rette.
- En mangekant kalles regulær hvis den har like lange sider og like store vinkler.
- For trekanter er de to betingelsene ekvivalente.

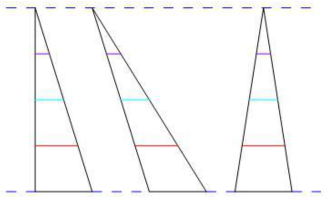
Areal av trekanter 1

- Vi starter med formelen for arealet av et rektangel.
- Gitt et parallellogram, kan vi konstruere et rektangel med samme areal.
- 
- Gitt en rettvinklet trekant, kan vi konstruere et rektangel med dobbelt så stort areal.
- 
- Gitt en vilkårlig trekant, kan vi konstruere et parallellogram med dobbelt så stort areal.
- 

Areal av trekanter 2

- Volumet av en pyramide i $\mathbb{R}^n$ er grunnflate ganger høyde delt på n.
- Vi lager en pyramide $P(B, V)$ i $\mathbb{R}^n$ ved å ta et polyeder i $\mathbb{R}^{n-1}$ og forbinde de $(n-2)$-dimensjonale sideflatene til B med et punkt V med $x_n(V) = h \neq 0$. Volumet av tverrsnittet med et horisontalt plan med høyde x er $V_{n-1}(P(B, V) \cap \{x_n = x\}) = (x/h)^n V_{n-1}(B)$, så $V_n(P(B, V)) = \int_0^h V_{n-1}(B)(x/h)^n \, dx = \dfrac{1}{n+1} V_{n-1}(B)h$.

Cavalieris prinsipp i planet

- Bonaventura Francesco Cavalieri (1598—1647) formulerte i 1635 en metode som tidligere også var blitt brukt av Arkimedes (ca. 287 f.Kr. — ca. 212 f.Kr.) og Zǔ Gèngzhī 祖暅之, (ca. 450 – ca. 520).
- Cavalieris prinsipp i planet: Anta at to figurer i planet ligger mellom to parallelle linjer, og at alle linjer som er parallelle med disse to skjærer figurene i linjestykker av samme lengde. Da har de to figurene samme areal.
- 

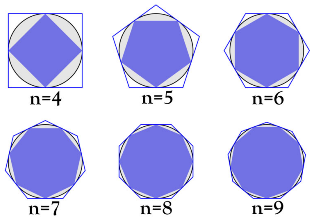
Definisjonen av π

- π er omkrets delt på diameter.
- Er dette veldefinert?
- Vi må vise at forholdet mellom omkrets og diameter ikke avhenger av hvilken sirkel vi velger.
- La $P(S)$ betegne omkretsen til en lukket kurve S. Anta at P_n er en familie av polygoner innskrevet i enhetssirkelen, C_1, slik at omkretsen til P_n konvergerer mot omkretsen til enhetssirkelen, $\lim_{n\to\infty} P(P_n) = P(C_1)$. Hvis vi strekker P_n med en faktor r, får vi en familie med polygoner som er en tilnærming til sirkelen med radius r, C_r. Siden en polygon består av rette linjer, er det lett å se at $P(rP_n) = rP(P_n)$, og vi får

$$P(C_r) = \lim_{n\to\infty} P(rP_n) = \lim_{n\to\infty} rP(P_n) = r \lim_{n\to\infty} P(P_n) = rP(C_1).$$

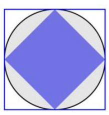
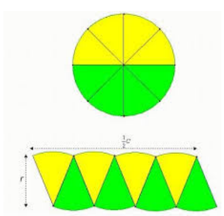
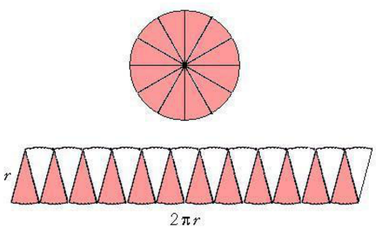
Dette impliserer at π er veldefinert.

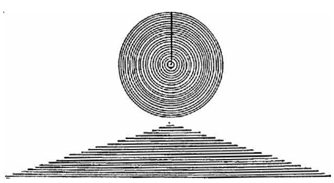
Verdien av π

- Ved å se på innskrevne og omskrevne firkanter får vi $2\sqrt{2} < \pi < 4$.
- 

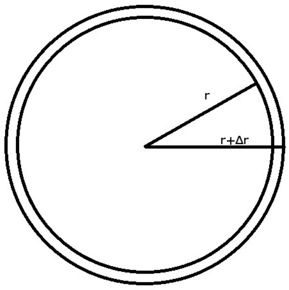
- Ved å se på en innskreven 6-kant får vi $\pi > 3$.
- Ved å se på 96-kanter, viste Arkimedes at $223/71 < \pi < 22/7$ eller $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

Areal av sirkelen

- Det er lett å se at arealet av sirkelen er mellom $2r^2$ og $4r^2$.
- 
-  

- 

Den deriverte av arealet er omkretsen

- 

- La $A(r)$ være arealet av sirkelen med radius r.
- $A(r+\Delta r) - A(r) = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi(2r\Delta r + (\Delta r)^2)$.

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r+\Delta r) - A(r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \pi(2r + \Delta r) = 2\pi r.$$

- Alternativt kan vi brette ut «ringen» og få et rektangel, slik at $A(r+\Delta r) - A(r) \approx C(r)\Delta r$, hvor $C(r)$ er omkretsen. Da er

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r+\Delta r) - A(r)}{\Delta r} \approx \lim_{\Delta r \to 0} \frac{C(r)\Delta r}{\Delta r} = C(r).$$

Hva med kvadratet?

- $A(s) = s^2$, $P(s) = 4s$.
- Hvis vi øker s med Δs får «ringen» tykkelse $\Delta s/2$.
- Sett i stedet $t = s/2$. Da blir $A(t) = (2t)^2 = 4t^2$ og $P(t) = 4(2t) = 8t$.

Areal og omkrets av sirkelen

- Vi trenger ikke å bevise begge formlene $C(r) = 2\pi r$ og $A(r) = \pi r^2$.
- Den ene brukes til å definere π. Enten som forholdet mellom omkrets og diameter, eller som arealet av enhetssirkelen.

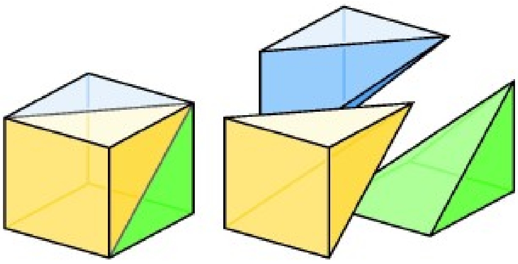
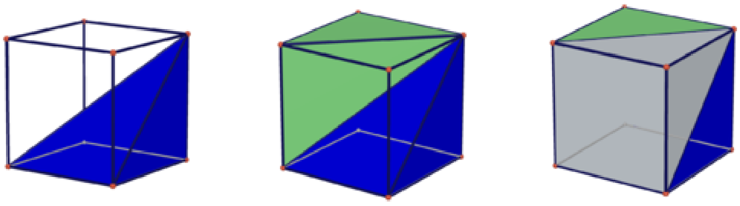
Volum er vanskeligere enn areal

- Carl Friedrich Gauß (1777-–1855) påpekte at for å utlede formelen $gh/3$ for en vilkårlig pyramide, må man bruke et grenseargument.
- Dette henger sammen med Hilberts tredje problem. To polygoner med samme areal kan klippes og limes slik at de blir like. Men Max Dehn viste i 1901 at det finne polyedre med samme volum som ikke er «saksekongruent». Dette illustrerer at volum er et mer komplisert begrep.

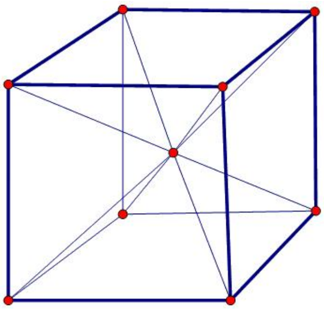
Cavalieris prinsipp

- Bonaventura Francesco Cavalieri (1598—1647) formulerte i 1635 en metode som tidligere også var blitt brukt av Arkimedes (ca. 287 f.Kr. — ca. 212 f.Kr.) og Zǔ Gèngzhī 祖暅之, (ca. 450 – ca. 520).
- Anta at to figurer i rommet ligger mellom to parallelle plan, og at alle plan som er parallelle med disse to skjærer figurene i tverrsnitt av samme areal. Da har de to figurene samme volum.
- 

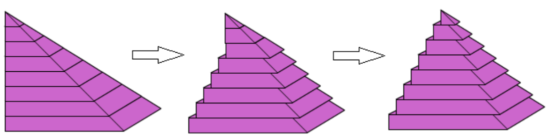
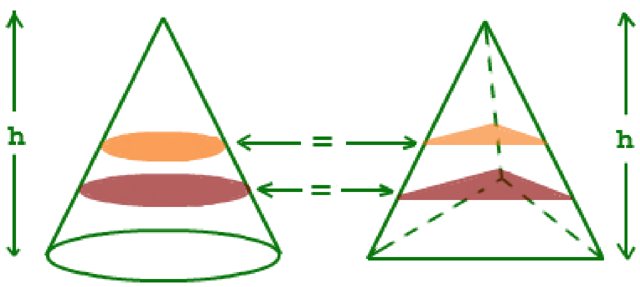
Volum av pyramider 1

- Volumet av en kvadratisk pyramide med toppunkt over et hjørne og høyde og side lik 1 er $1/3$.
- 
- 

Volum av pyramider 2

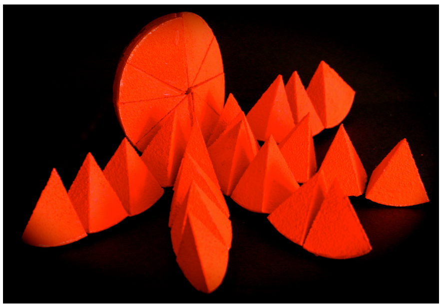
- Volumet av en kvadratisk pyramide med toppunkt over et hjørne og høyde $1/2$ og side 1 er $1/6$.
- 
- Dette kan brukes som motivasjon for den generelle formelen $V = gh/3$.

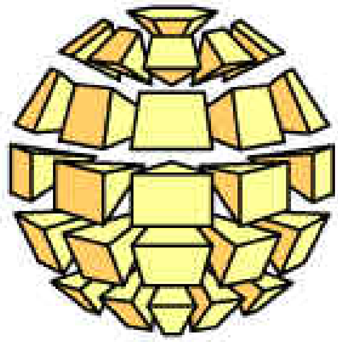
Volum av pyramider 3

- Vi kan nå bruke Cavalieris prinsipp til å konkludere at formelen $V = gh/3$ holder for alle pyramider og kjegler.
- 
- 

Overflateareal og volum av kuler 1

- Vi skriver $V(r)$ for volumet av kulen med radius r og $A(r)$ for overflatearealt.
- Anta at vi kutter kulen opp i «pyramider» som vi bretter ut. Vi får da at volumet av kulen er summen av volumet av «pyramidene», men det er tilnærmet $A(r)r/3$.





Overflateareal og volum av kuler 2

- Formelen $V(r) = A(r)r/3$ viser at vi bare trenger å bevise en av formlene

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Overflateareal og volum av kuler 3

- På tilsvarende måte som for sirkelen kan vi vise at hvis $V(r)$ er volumet av kulen med radius r og $A(r)$ overflaten, så er $V'(r) = A(r)$.
- $V(r + \Delta r) - V(r)$ er tilnærmet lik $A(r)\Delta r$. Vi får derfor

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r} \approx \lim_{\Delta r \to 0} \frac{A(r)\Delta r}{\Delta r} = A(r).$$

- Dette viser igjen at vi bare trenger å bevise en av formlene

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Overflateareal og volum av kuler 4

- Før jeg beviser formlene, vil jeg motivere dem.
- Anta at du har et oppblåsbart halvkuleformet telt. Når det ligger flatt på bakken, har det areal πr^2. Hvor mye har arealet strukket seg når du har blåst det opp til en halvkule?
- Anta at halvkuleteltet er omskrevet at et sylindertelt. Da er arealet av sylinderteltet

$$\pi r^2 + 2\pi r \cdot r = 3\pi r^2.$$

- Hadde det ikke vært fint om arealet av halvkuleteltet var midt mellom disse, nemlig $2\pi r^2$?

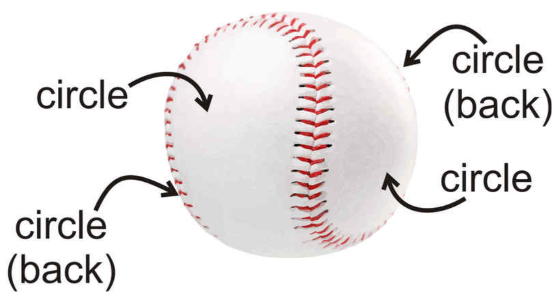
Overflateareal og volum av kuler 5

- Anta at du putter et kjegleformet telt inne i det halvkuleformete teltet ditt. Kjegleteltet har volum $\pi r^3/3$.
- Sylinderteltet som omskriver halvkuleteltet har volum πr^3.
- Hadde det ikke vært fint om volumet av halvkuleteltet var midt mellom disse, nemlig $2\pi r^3/3$?

UiO : Universitetet i Oslo

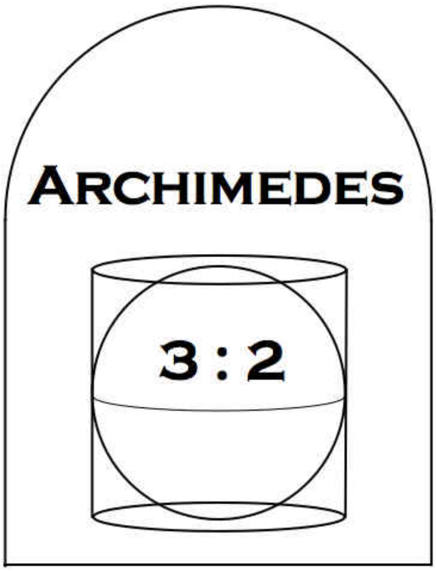
Overflateareal og volum av kuler 6

- En annen måte å motivere formelen $A(r) = 4\pi r^2$ på er å se på en baseball eller en tennisball.



Arkimedes' gravsten

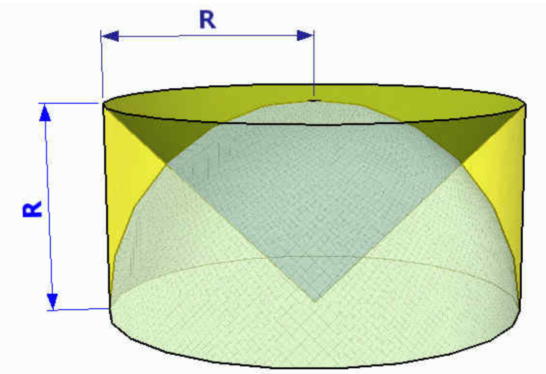
- Arkimedes (287 f.Kr. - 212 f.Kr.) ønsket denne figuren på sin gravsten.



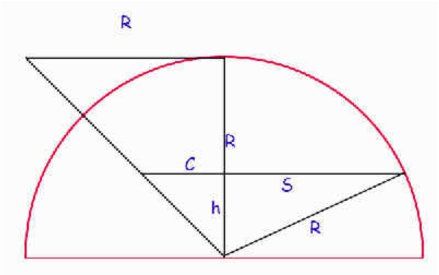
- Forholdet mellom arealet og volumet av sylinderen og kulen er det samme.
- $6\pi r^2/4\pi r^2 = 3/2$ og $2\pi r^3/(4/3)\pi r^3 = 3/2$.

Bevis for volumformelen

- Vi vil bruke Cavalieris prinsipp. Putt en kjegle opp ned inne i en halvkule.



Bevis for volumformelen 2

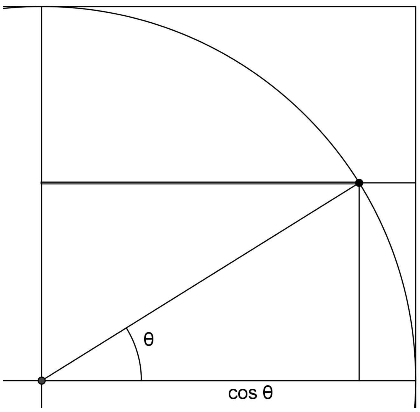
- 

- Hvis vi snitter i høyde h, får vi areal
$$\pi S^2 = \pi(R^2 - h^2)$$
for kulen og
$$\pi C^2 = \pi h^2$$
for kjeglen. Men summen av disse blir πR^2 som er arealet av snittet av sylinderen.
- Det følger at summen av volumet av halvkulen og volumet av kjeglen er volumet av sylinderen, så volumet av halvkulen blir
$$\pi r^3 - \pi r^3/3 = 2\pi r^3/3.$$

Bevis for arealformelen 1

- Vi vil vise at projeksjonen fra kulen ut til veggen av den omskrevne sylinderen er arealbevarende. Siden arealet av sylinderveggen er $2\pi r \cdot 2r$ får vi $A(r) = 4\pi r^2$.
- Vi vil se på hvordan projeksjonen strekker horisontalt og vertikalt. Vi vil se på enhetssirkelen for å gjøre argumentet enklere.

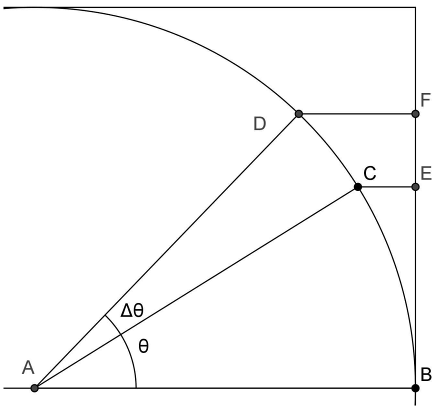
Bevis for arealformelen 2

- 

- Breddesirkelen med breddegrad θ har lengde $2\pi\cos\theta$, og blir avbildet på en sirkel på sylinderen med lengde 2π, så horisontalt strekkes lengder med en faktor på $1/cos\theta$.

UiO : Universitetet i Oslo

Bevis for arealformelen 3

- Vi vil nå sammenligne vertikale avstander på sylinderen og kulen.
- 

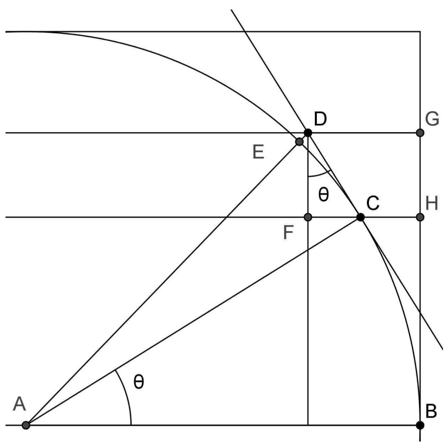
- På sylinderen blir avstanden $\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta$, og på kulen er avstanden $\Delta\theta$. Det følger at den vertikale strekningsfaktoren blir

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{\Delta\theta}=\cos\theta.$$

Bevis for arealformelen 4

- Siden produktet av den vertikale og den horisontale strekningsfaktoren er $\cos\theta \cdot 1/\cos\theta = 1$, følger det at projeksjonen er arealbevarende.

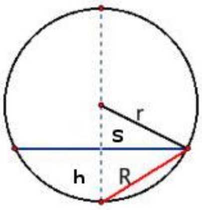
Bevis for arealformelen 5

- 

- Vi kan også bestemme den vertikale strekningsfaktoren ved å måle langs tangenten i stedet for å måle langs kulen. Da blir den vertikale strekningsfaktoren $\mathrm{GH}/\mathrm{DC} = \cos\theta$.

Overflateareal av kulekalott

- En kulekalott med høyde h og avstand fra pol til rand R har i følge Arkimedes areal $2\pi rh$. Vi skal nå vise at dette også kan skrives som πR^2.



- La s være radiusen til randen til kalotten. Da er

$$\begin{aligned} (r-h)^2 + s^2 &= r^2, \\ h^2 + s^2 &= 2rh, \\ R^2 = h^2 + s^2 &= 2rh. \end{aligned}$$

Overflateareal av kulekalott 2

- Hvis vi setter $h = r$ eller $h = 2r$, får vi formlene for areal av halvkule og kule.
- Hvis vi ser på kjeglen inne i kulekalotten, så er arealet av mantelflaten til kjeglen

$$\pi R^2 \frac{2\pi s}{2\pi R} = \pi Rs,$$

som vi ser er mindre enn πR^2.