



UiO : Universitetet i Oslo

Sannsynlighet og kombinatorikk i videregående skole

Helmer Aslaksen

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning/Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

helmer.aslaksen@gmail.com
www.math.nus.edu.sg/aslaksen/



Hvorfor sannsynlighetsregning og kombinatorikk?

- ▶ Mange har dårlig bakgrunn.
- ▶ Det er vanskelig å få poeng for delvis riktig svar. Enten er det riktig eller så er det galt.
- ▶ Det er lett å gjøre feil. Gale argumenter kan se riktige ut.
- ▶ Riktige argumenter kan se gale ut!
- ▶ Sannsynlighet og kombinatorikk er vanskelig!
- ▶ Hvis du ikke synes sannsynlighetsregning er vanskelig, så har du ikke forstått det!
- ▶ Det er derfor det er morsomt!

Hva vil jeg snakke om i dag?

- ▶ Noen ganger diskuterer vi ting dere kan si til alle elevene.
- ▶ Noen ganger diskuterer vi ting dere kan si til flinke elever.
- ▶ Noen ganger diskuterer vi ting dere sannsynligvis aldri vil si til elevene, men som gir dere en forståelse som gjør at dere kan føle dere trygge når dere gir en forenklet forklaring til elevene.
- ▶ Et mål for alt jeg snakker om er at ingen vil spørre: «Hvorfor snakker vi om dette?» Jeg håper at alle vil være enige i at dette er relevant for lærere.

Hva vil jeg snakke om i dag? 2

- ▶ Utvalg
- ▶ Sannsynlighetsregningens historie
- ▶ Tobarnsfamilieproblemet

Utvalg

- ▶ Mange oppgaver, spesielt på ungdomsskolen, er vanskelige fordi det (etter min mening) er uklart om utvalgene er med eller uten tilbakelegging og om de er ordnet eller uordnet.
- ▶ En lærer har 2 oppgaver om algebra, 3 om geometri og 4 om sannsynlighet, og skal lage en prøve med én oppgave av hver type. Hvor mange forskjellige prøver kan læreren lage?
- ▶ Er det ordnet eller uordnet?

Utvalg 2

- a. Hvor mange utfall (kombinasjoner) kan du få når du kaster to vanlige terninger?
- b. Hvilket av disse utfallene er mest sannsynlig å få på ett kast med *fem* terninger?
 - ▶ Kombinasjonen: 1, 2, 3, 4, 5
 - ▶ Kombinasjonen 6, 6, 6, 6, 6
 - ▶ De er like sannsynlige
- ▶ Fasiten sier 36 og 1, 2, 3, 4, 5.
- ▶ I a) mener de ordnet, i b) mener de uordnet.

Utvalg 3

- ▶ Spørsmålet er om terningene er like eller forskjellige.
- ▶ Anta at den ene terningen er gul og den andre er blå. Da er det 36 mulige utfall.

	G-1	G-2	G-3	G-4	G-5	G-6
B-1						
B-2						
B-3						
B-4						
B-5						
B-6						

- ▶ Hvor mange forskjellige utfall er det hvis terningene er like?
- ▶ Det er 21 utfall. Vi har en ikke-uniform sannsynlighetsmodell, hvor 15 utfall (de over diagonalen) har sannsynlighet $1/18$ og 6 utfall (de på diagonalen) har sannsynlighet $1/36$.

	1	2	3	4	5	6
1	X	XX	XX	XX	XX	XX
2		X	XX	XX	XX	XX
3			X	XX	XX	XX
4				X	XX	XX
5					X	XX
6						X

Utvalg 4

- ▶ Hva er den mest sannsynlige summen hvis du kaster to terninger?
- ▶ Lat som om den ene terningen er gul og den andre er blå.

	G-1	G-2	G-3	G-4	G-5	G-6
B-1	2	3	4	5	6	7
B-2	3	4	5	6	7	8
B-3	4	5	6	7	8	9
B-4	5	6	7	8	9	10
B-5	6	7	8	9	10	11
B-6	7	8	9	10	11	12

- ▶ Sannsynligheten for å få 7 er $6/36 = 1/6$.
- ▶ Hvis terningene er like, har vi en ikke-uniform sannsynlighetsmodell. Sannsynligheten for å få 7 er $3 \times 1/18 = 1/6$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2		4	5	6	7	8
3			6	7	8	9
4				8	9	10
5					10	11
6						12

Utvalg 5

- ▶ Dette er viktig i mange brettspill, for eksempel i Settlers from Catan og Monopol.

STARTING MAP FOR BEGINNERS

To make it as easy as possible for you to get started with *Catan*, we use an award-winning rules system, which consists of 3 parts—the *Overview*, the *Game Rules*, and the *Almanac*.

If you've never played *Catan*, please read the game *Overview* first—it's on the back cover of this booklet. Next, read the *Game Rules* and start to play. And finally, if you have questions during the game, please consult the *Almanac* (it begins on page 6).

ILLUSTRATION 1

Begin the game with the resource cards produced by the settlements marked with white stars. See ☆

ODDS FOR DICE ROLLS

2 & 12 = 3%
3 & 11 = 6%
4 & 10 = 8%
5 & 9 = 11%
6 & 8 = 14%
7 = 17%

RESOURCE PRODUCTION

Ja takk, begge deler!

- ▶ S1 oppgave: «På et fat ligger det epler, pærer, bananer, appelsiner og kiwi. Du skal ta med deg frukt på tur, høyst én frukt av hver type. Hvor mange utvalg kan du gjøre?»
- ▶ Gjør denne oppgaven på to måter. Som et ordnet utvalg eller som et uordnet utvalg!
- ▶ I boken stod oppgaven etter et avsnitt om ordnete utvalg.
- ▶ Uordnet:
$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$
- ▶ Ordnet: Svar ja eller nei til hver frukt. Det gir et ordnet 5-tuppel av 0 og 1 (hvor ikke alle er 0). Det er $2^5 - 1 = 31$ slike.
- ▶ Kan også tolke det som ikke-null binære tall med opp til fem siffer.

Fire typer av utvalg

- ▶ Velg k fra n objekter

	Med tilbakelegging	Uten tilbakelegging
Ordnet	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdots (n-k+1)$
Uordnet	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- ▶ Bemerk at $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{1 \cdots k}$.
- ▶ $\binom{k+n-1}{k}$ kan skrives som $\left(\binom{n}{k}\right)$ og kalles multivelg.
- ▶ Hvilke av disse fire tallene er størst?
- ▶ Ordnet med tilbakelegging størst, uordnet uten tilbakelegging minst.

Bars and stars

- ▶ Anta at du velger $k = 5$ fra $n = 3$ objekter, uordnet med tilbakelegging. For eksempel $[1, 1, 2, 2, 3]$, $[1, 1, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 3, 3, 3]$. (Dette kalles multiset.)
- ▶ Se for deg en avlang pilleboks med 3 rom. La $[$ være endeveggene, $|$ skilleveggene og $*$ pillene. Da kan utvalgene over beskrives som $[** | **|*]$, $[*****|]$, $[** || ***]$.
- ▶ Se nå for deg et Brett med $k + n - 1 = 7$ hull, hvor hvert hull skal fylles med en stjerne eller en skillevegg. En slik plassering er bestemt av hvor du plasserer de k stjernene (eller de $n - 1$ skilleveggene).
- ▶
$$\binom{k + n - 1}{k} = \binom{k + n - 1}{n - 1}. \text{ (Husk at } k + n - 1 - k = n - 1.)$$

Bars and stars 2 (avansert)

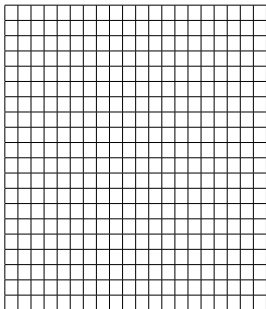
- ▶ Tenk deg i stedet at hver gang du trekker et element, legger du det tilbake sammen med en kopi. Da vil du til slutt ha $n + k - 1$ elementer å velge mellom, og hvis du bruker formelen for uordnet uten tilbakelegging på denne mengden, får du riktig svar $\binom{k + n - 1}{k}$. Kan en slik tankegang brukes til et bevis for formelen?
- ▶ Legg til $k - 1$ symboler r_1, \dots, r_{k-1} , hvor r_i betyr å gjenta element i . Velg så k elementer fra $\{1, \dots, n, r_1, \dots, r_{k-1}\}$, og sorter dem i rekkefølge. Anta at $n = 3$ og $k = 5$, og at vi har valgt $\{2, 3, r_1, r_3, r_4\}$. Vi tolker nå dette som utvalget $\{2, 3, 2, 2, 2\}$, og vi ser at slike uordnede utvalg av k fra $n + k - 1$ uten tilbakelegging svarer til et uordnet utvalg av k fra n med tilbakelegging.

Farge baller

- ▶ Du har k baller som skal males, og du har n forskjellige farger. Hvor mange måter kan dette gjøres på?
- ▶ Er ballene like? Kan to baller ha samme farge?
- ▶ Anta at ballene er like og at to baller kan ha samme farge. Da er svaret $\binom{n+k-1}{k}$.

Tabeller

- ▶ Det er 20 lag i the English Premier League. Hvor mange kamper er det i løpet av en sesong? Bruk en tabell!



- ▶ $20 \times 20 - 20 = 380 = 20 \times 19$. Ordnet utvalg uten tilbakelegging.

To utvalg med tabell

- ▶ Det er tre jenter og to gutter i en klasse. Du velger to elever. Hva er sannsynligheten for at du velger en jente begge gangene?

	J1	J2	J3	G1	G2
J1					
J2					
J3					
G1					
G2					

- ▶ Premie til den som er flinkest i matematikk og en annerledes premie til den som er flinkest i engelsk. Ordnet, med tilbakelegging, $9/25$, $25 = 5^2$.
- ▶ Premie til den som er flinkest i matematikk og en lik premie til den som er flinkest i engelsk. Uordnet, med tilbakelegging, $6/15$, $15 = (6 \times 5)/(1 \times 2)$.
- ▶ Første- og annenpremie til de to som er flinkest i matematikk. Ordnet, uten tilbakelegging, $6/20$, $20 = 5 \times 4$.
- ▶ To like premier til de to som er flinkest i matematikk. Uordnet, uten tilbakelegging, $3/10$, $10 = (5 \times 4)/(1 \times 2)$.

To utvalg med tabell 2

- ▶ Jeg forklarte det slik mange ganger, men plutselig en dag forstod jeg at det var feil!
- ▶ Heldigvis var forklaringen på begynnelsen av foredraget mitt, og det var det som gjorde at jeg oppdaget feilen.
- ▶ I eksemplet med summen av to like terninger (uordnet), så vi at vi måtte ta hensyn til at det var en ikke-uniform modell. Det gjorde utregningene vanskeligere, så det lure var å late som om det var ordnet, for å få en uniform modell, og så «glemme» ordningen.

To utvalg med tabell 3

- ▶ For å telle *antallet* måter vi kan velge to jenter på, spiller det en rolle om utvalget er ordnet eller uordnet, men hvis vi ønsker å finne *sannsynligheten* for at vi velger to jenter, spiller det ingen rolle om utvalget er ordnet eller uordnet!
- ▶ Uordnet utvalg reduserer antallet mulige utfall, ved at utfallene under diagonalen slås sammen med utfallene over diagonalen, og sannsynligheten for disse utfallene fordobles.
- ▶ Men sannsynligheten for en hendelse i den uordnede modellen er den samme som sannsynligheten for den tilsvarende hendelsen i den ordnede modellen. Den eneste forskjellen er at hendelsen består av flere utfall i den ordnede modellen. Sannsynligheten for hendelsen «valg av to jenter» i den uordnede modellen er lik sannsynligheten for hendelsen «valg av jente i runde 1 og valg av jente i runde 2» i den ordnede modellen. Med tilbakelegging blir det 9 (ordnet) eller 6 (uordnet) utfall. Uten tilbakelegging blir det 6 (ordnet) eller 3 (uordnet) utfall.

To utvalg med tabell 4

- ▶ For uordnet med tilbakelegging er svaret *ikke* $6/15$. De 5 utfallene langs diagonalen har sannsynlighet $1/25$ hver, mens de 10 over diagonalen har sannsynlighet $2/25$ hver. Sannsynligheten for to jenter blir derfor $3 \cdot 1/25 + 3 \cdot 2/25 = 9/25$, som er det samme som sannsynligheten for ordnet med tilbakelegging.
- ▶ I tilfellene uten tilbakelegging, blir den ingen forskjell, siden ingenting ligger på diagonalen. Derfor er de to svarene $6/20$ og $3/10$ like.

Forskjellen på kombinatorikk og sannsynlighet

- ▶ Dette er et godt eksempel på at vi må være ydmyke overfor sannsynlighetsregning. Men det er desto morsommere når vi forstår det!
- ▶ Dette eksemplet illustrerer også forskjellen på kombinatorikk og sannsynlighet. Antallet måter å velge på avhenger av om det er ordnet eller uordnet, men sannsynligheten er den samme.
- ▶ I kombinatorikk er svaret alltid et heltall. I sannsynlighet er svaret et tall mellom 0 og 1.
- ▶ Jeg så nylig et utkast til en eksamensoppgave på grunnskolelærerutdanningen. Oppgaven var om antallet måter man kunne få to ess på når man trekker fem kort fra en kortstokk. Oppgaveteksten spesifiserte at kortstokken var godt stokket!

Sannsynlighetsregningens historie

- ▶ Er matematikkhistorie nyttig for lærere og elever?
- ▶ Ja, hvis man velger de rette temaene.
- ▶ Sannsynlighetsregningens tidlige historie er et meget godt tema.
- ▶ Både Luca Pacioli (ca. 1447–1517) (*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, 1494) og Gerolamo Cardano (1501—1576) (*Liber de ludo aleae*, Boken om tilfeldighetsspill, ca. 1564) løste enkle problemer i sannsynlighetsregning, men når de prøvde å løse vanskeligere problemer, gikk det ofte galt.

Sannsynlighetsregningens historie 2

- ▶ I 1654 stilte Antoine Gombaud Chevalier de Méré to spørsmål til Blaise Pascal (1623–1662). Problemene hadde blitt diskutert av Pacioli og Cardano, men de ble løst av Pascal i en brevveksling med Pierre de Fermat (1601-1665), og dette regnes som starten på sannsynlighetsregningen.
- ▶ Stemmer det at sannsynligheten for å få minst én sekser på fire kast med én terning er over 50 prosent, men at sannsynligheten for å få to seksere minst én gang på 24 kast med to terninger er under 50 prosent?

Chevalier de Mérés første problem - To seksere

- ▶ Cardano mente han allerede hadde løst Chevalier de Mérés første problem:
- ▶ Siden sannsynligheten for å få en sekser er $1/6$, mener Cardano at vi vil få en sekser hver 6. gang vi kaster. Derfor er det 50 % sjanse for å få en sekser på tre kast i følge Cardano.
- ▶ Siden sannsynligheten for å få to seksere på et kast med to terninger er $1/36$, vil vi få to seksere hver 36. gang vi kaster to terninger. Derfor er det 50 % sjanse for å få to seksere på 18 kast i følge Cardano.

Chevalier de Mérés første problem - To seksere 2

- ▶ Chevalier de Méré mente at Cardano tok feil, og at man trengte å kaste fire ganger med én terning for å kunne vedde på å få minst én sekser.
- ▶ Dette er riktig, siden sannsynligheten for ikke å få noen seksere i fire kast er $(5/6)^4 \approx 0,48$, mens $(5/6)^3 \approx 0,58$.
- ▶ Hvis du kaster med to terninger, er det nå 36 mulige utfall, og Chevalier de Méré mente at han kunne bruke det samme forholdet $(4/6)$ som ved kast med én terning, og at man derfor kunne vente å få minst ett par seksere i $36 \times 4/6 = 24$ kast.
- ▶ Dette er feil siden $(35/36)^{24} \approx 0,51$ og $(35/36)^{25} \approx 0,49$.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill

- ▶ To personer spiller et spill som består av en rekke omganger, og i hver omgang har de like stor sjanse til å vinne. Vinneren er den som først har vunnet seks omganger. Hvordan skal potten fordeles hvis spillet må stoppes når spiller A har vunnet fem omganger og spiller B har vunnet to?
- ▶ Luca Pacioli mente at man skulle se på hvor mange spill hver hadde vunnet. Han mente at A burde få $5/7$ av potten.
- ▶ Denne løsningen ble kritisert i 1556 av Niccolo Tartaglia (som løste tredjegradslikningen), som så på et spill som ble avbrutt etter bare en omgang. Er det rimelig at A får hele potten fordi han eller hun leder 1-0?

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 2

- ▶ Tartaglia sa at hvis A leder med tre poeng, som er halvparten av antallet som trengs for å vinne, så bør A få halvparten av B's innsats, så A får $3/4$ og B $1/4$ av potten.
- ▶ Er det rimelig at 5-2 og 3-0 behandles likt?
- ▶ Cardano forstod at man må se på hvor mange spill spillerne trenger å vinne, ikke hvor mange de har vunnet. Han prøvde å gjøre et induktivt argument, men fikk det ikke helt til.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 3

- ▶ Pascal antar at stillingen er 5-4 og at potten er 80 kroner. Hvis A vinner neste omgang, har A vunnet, men hvis B vinner omgangen, står de likt.
- ▶ Det er derfor rimelig at potten blir delt i to, at A får den ene halvparten, og at de deler den andre halvparten likt. Så A får 60 og B får 20.
- ▶ Anta nå at stillingen er 5-3. Igjen deler vi potten i to like deler. Hvis A vinner neste omgang vinner A spillet, og hvis B vinner neste omgang er stillingen 5-4. Men det er det tilfellet vi så på ovenfor! Vi deler derfor potten i to like deler, A får den ene delen, og den andre delen deles 3 til 1.
- ▶ Pascal gir så en komplett løsning som involverer Pascals trekant og induksjonsbevis.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 4

- ▶ Anta at A trenger å vinne r omganger og at B trenger å vinne s omganger. Sett $n = r + s - 1$, og anta at vi spiller n omganger. Da vil én, og bare én spiller ha vunnet. A skal da ha $\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} / 2^n$ av potten, og B skal ha $\sum_{k=s}^n \binom{n}{k} / 2^n$.
- ▶ Anta at $r = 1$ og $s = 2$. Da blir utfallene (A, A) , (A, B) , (B, A) og (B, B) . A skal ha $(1 + 2)/4 = 3/4$ og B skal ha $1/4$.
- ▶ Jeg kunne ha sagt at utfallene var (A) , (B, A) og (B, B) , men da hadde utfallsrommet ikke vært uniformt.

Chevalier de Mérés annet problem - Avbrutt spill 5

- Hvis $r = 2$ og $s = 5$, skal A ha

$$\left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} \right) / 2^6$$

og B skal ha

$$\left(\binom{6}{5} + \binom{6}{6} \right) / 2^6.$$

Tobarnsfamilieproblemet

- ▶ En mann har to barn. Du vet at det eldste barnet er en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?
- ▶ Du vet at minst ett av barna er en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?
- ▶ Du spør mannen om minst ett av barna er en gutt og han sier ja. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?
- ▶ Du treffer mannen på gaten med et barn som var en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?

Tobarnsfamilieproblemet 2

- ▶ Se på utfallsrommet av alle familier med to barn, $\{(G, G), (G, J), (J, G), (J, J)\}$. (Merk at nå bruker jeg ordnede par, for å få en uniform sannsynlighetsmodell.)
- ▶ Anta at du sampler *familier* og spør om familien har minst én gutt. Hvis ja, blir den en del av utfallsrommet. Hvis nei, strykes den. Utfallsrommet blir $\{(G, G), (J, G), (G, J)\}$ med uniform fordeling, og sannsynligheten for (G, G) er $1/3$.
- ▶ Anta at du sampler *barn* fra tobarnsfamilier og ser om det er en gutt. Hvis ja, blir den en del av utfallsrommet. Hvis nei, strykes den. Utfallsrommet blir $\{(G, G), (J, G), (G, J)\}$ men nå er det ikke en uniform fordeling, for (G, G) har dobbel så stor sannsynlighet som (J, G) og (G, J) for halvparten av disse familiene har blitt strøket. Så nå er sannsynligheten for (G, G) faktisk $1/2$.

Tobarnsfamilieproblemet 3

- ▶ Sett $q = P(\text{Du sier at han har minst én gutt} \mid \text{Han har } \{G, J\})$.
- ▶ Hvis du sampler familien, det vil si du spør faren eller på en annen måte har full informasjon om familien, så er $q = 1$.
- ▶ Hvis du sampler barn, det vil si du observerer en gutt, uten å vite noe om det andre barnet, så er $q = 1/2$. Du vil gå glipp av halvparten av $\{G, J\}$ familiene, fordi halvparten av tiden ser du en jente.

Tobarnsfamilieproblemet 4

- ▶ Vi bruker Bayes' formel.

$$P(\{G, J\} \mid \text{Minst én gutt}) = \frac{P(\text{Minst én gutt} \mid \{G, J\})P(\{G, J\})}{P(\text{Minst én gutt})}.$$



$$P(\text{Minst én gutt}) = P(\text{Minst én gutt} \mid \{G, J\})P(\{G, J\}) \\ + P(\text{Minst én gutt} \mid \{G, G\})P(\{G, G\}).$$

- ▶ $P(\{G, J\} \mid \text{Minst én gutt}) = (q \times 1/2)/(q \times 1/2 + 1 \times 1/4) = 2q/(1 + 2q).$
- ▶ Det følger at $P(\{G, G\} \mid \text{Minst én gutt}) = 1/(1 + 2q).$
- ▶ $q = 1/2$ gir $P = 1/2$, og $q = 1$ gir $P = 1/3$.

Tobarnsfamilieproblemet 5

- ▶ Vi kan illustrere dette ved følgende variasjon. Anta at dere vet at jeg enten har ti gutter, eller en gutt og ni jenter. Dere ser meg sammen med en gutt. Er det da mest sannsynlig at det sitter ni gutter eller ni jenter hjemme?
- ▶ Hvis jeg har ni jenter vil du sannsynligvis se meg med en av jentene, så hvis du ser meg sammen med en gutt, er det sannsynligvis en av de ti guttene.

Tobarnsfamilieproblemet 6

- ▶ Det er en familie av problemer som alle har tilsvarende utregninger. Tobarnsfamilie, Monty Hall (bil/geit), tre fanger, tre kort (Bertrands boks paradoks) og Principle of Restricted Choice i bridge.

Takk for meg!