MAT3360, autumn 2022
Mandatory exercise 1 of 2.

Deadline. Thursday September 29, 2022, 14:30, in Canvas (canvas.uio.no).

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist. Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

Information in English

GOOD LUCK!

You must have a score of at least 60% to pass the exercise.

Question 1. Find approximations to both zeros of the function

$$f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{4},$$

and prove that your answers are accurate to seven decimal places.

Question 2.

a) Find the QR factorisation of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Use the proof of Theorem 2.12 in E&D to formulate an algorithm to compute the QR factorisation of an $m \times n$ matrix A where $m \geq n$. Implement this algorithm on a computer and test it on the matrix A from the previous question.

c) Let $m > n$ be positive integers and define

$$f(x) = e^{-8x^2},$$

and set $x_i = -1 + 2(i-1)/(m-1)$ for $i = 1, \ldots, m$. Let p_n be a polynomial of degree $n-1$, i.e.,

$$p_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^{j-1},$$

where c_j are real numbers. These coefficients are chosen such that

$$\sum_{i=1}^{m} \left(p_n(x_i) - f(x_i)\right)^2$$

is minimal. This is called the least squares approximation.

Find an $m \times n$ matrix A and a vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ such that the problem is reformulated to:

$$\text{find } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \text{ such that } \|A\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\|_2 \text{ is minimal.}$$

d) Use your QR algorithm to implement a program which computes $\boldsymbol{c}$ (and thereby p_n) given m and n. Let $m = 200$ and plot f, p_3, p_6 and p_{15} for $x \in [-1, 1]$.