MAT3360, autumn 2022
Mandatory exercise 1 of 2.

Deadline. Thursday October 27, 2022, 14:30, in Canvas (canvas.uio.no).

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist. Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

Information in English

GOOD LUCK!

You must have a score of at least 60% to pass the exercise.

Question 1. Let $f = f(x, y)$ be a function from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$.

a) Find a polynomial $P(x, y) = a + bx + cy + dxy$ such that

$$P(0,0) = f(0,0), \quad P(0,k) = f(0,k), \quad P(h,k) = f(h,k) \text{ and } P(h,0) = f(h,0),$$

where $h, k > 0$.

b) Show that

$$|P(x,y) - f(x,y)| \leq \frac{M}{2}\left(x(h-x) + y(k-y)\right)$$

where

$$M = \max\left\{ \max_{(x,y)\in[0,h]\times[0,k]} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right|, \max_{(x,y)\in[0,h]\times[0,k]} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \right\}$$

c) Find

$$\int_0^k \int_0^h P(x,y)\, dxdy.$$

d) Show that

$$\left|\int_0^k \int_0^h P(x,y) - f(x,y)\, dxdy\right| \leq \frac{M}{12}\left(h^3k + hk^3\right)$$

e) Let now n be a positive integer and set $h = 1/n$, $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, where $x_i = ih$, $y_j = jh$, for $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Define

$$\begin{aligned} I_n = h^2 \frac{1}{4}\Bigg(& f_{0,0} + f_{n,0} + f_{n,n} + f_{0,n} \\ & + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_{0,i} + f_{n,i} + f_{i,0} + f_{i,n} \\ & + 4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j}\Bigg), \end{aligned}$$

and show that

$$\left|I_n - \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy\right| \leq \frac{M}{6}h^2.$$

f) Find

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1 + x^2y^2},$$

accurate to five decimal places.

Question 2. Let (x, v) solve the system of differential equations

$$x'(t) = v(t), \quad v'(t) = -\sin(x(t)). \tag{1}$$

This models the movement of a pendulum, in which case x is the angle of the pendulum and v is the angular velocity.

Define the energy of the system as

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos(x),$$

and observe that the differential equation can be written

$$x' = \frac{\partial E}{\partial v}(x, v), \quad v' = -\frac{\partial E}{\partial x}(x, v).$$

a) Show that $E(x(t), v(t))$ is constant.

b) Implement the explicit Euler method and calculate an approximation to the solution of (1) with $x(0) = \pi/2.001$, $v(0) = 0$ for $t \in [0, 15]$, $\Delta t = 15/150 = 0.1$, and plot $E(x, v)$ as a function of t. Use these values for $x(0)$ $v(0)$, Δt and t for the rest of this exercise.

c) We are not satisfied with this computation since the energy is increasing. Therefore we replace the explicit Euler method with

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t v_n, \quad v_{n+1} = v_n - \Delta t \sin(x_{n+1}). \tag{2}$$

Implement this method and plot the energy as a function of time.

d) Although the energy is almost preserved for (2), we are still not satisfied. We therefore propose the scheme

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} &= \frac{E(x_n, v_{n+1}) - E(x_n, v_n)}{v_{n+1} - v_n} \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} &= -\frac{E(x_{n+1}, v_{n+1}) - E(x_n, v_{n+1})}{x_{n+1} - x_n} \end{aligned} \tag{3}$$

Show that this scheme preserves the energy **exactly**. (Hint: multiply the first equation with $v_{n+1} - v_n$ and the second with $x_{n+1} - x_n$.)

e) Show that the scheme (3) can be written

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\cos(x_{n+1}) - \cos(x_n)}{x_{n+1} - x_n} =: f(x_{n+1}) \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t \frac{\cos(x_{n+1}) - \cos(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \end{aligned}$$

and that, for sufficiently small Δt, f is a contraction.

f) Implement this scheme using a fixpoint iteration to find x_{n+1} and then set v_{n+1}. To check if E is constant, display $\max_n E(x_n, v_n) - \min_n E(x_n, v_n)$.