I hver oppgave er det angitt en maks-skår. Til sammen er det mulig å få 50 poeng. I oppgave 1 skal man svare på ett av alternativene. Det er lov å gi et svar på begge spørsmålene. I så fall vil høyeste skår bli tellende.

Oppgave 1, alternativ 1
(4 poeng) Anta at M og N er flate A-moduler. Vis at $M \otimes_A N$ også er flat over A.

Oppgave 1, alternativ 2
(8 poeng) La A være en ring. Vis at dersom det for ethvert maksimalt ideal $\mathbf{m}$ ikke finnes noen nilpotente elementer i lokaliseringen $A_{\mathbf{m}}$, så finnes det heller ikke noen nilpotente elementer i ringen A.

Løsning. (Alternativ 1) La $P \to Q$ være en injektiv avbildning av A-moduler. Siden N er flat har vi at $N \otimes_A P \to N \otimes_A Q$ er injektiv. Men da er $M \otimes_A (N \otimes_A P) \to M \otimes_A (N \otimes_A Q)$ injektiv siden M også er flat over A. Assosiativitet av tensorproduktet gir at $(M \otimes_A N) \otimes_A P \to (M \otimes_A N) \otimes_A Q$ er injektiv og det følger at $M \otimes_A N$ er flat over A.
(Alternativ 2)Anta at $x \in A$, $x \neq 0$, er nilpotent. Annihilatoren $Ann(x)$ er et ideal og derfor inneholdt i et maksimalt ideal $\mathbf{m}$. Det betyr at $Ann(x) \cap (A - \mathbf{m}) = \emptyset$ og det finnes ingen elementer utenfor $\mathbf{m}$ som annihilerer x. Mao. $x \neq 0$ i lokaliseringen $A_{\mathbf{m}}$. Motsigelse.

Oppgave 2
I denne oppgaven lar vi $\mathcal{R}(I)$ betegne radikalet til idealet I i en ring A.

a) (10 poeng) Vis at $I = \mathcal{R}(I)$ dersom I er et primideal. Finn et moteksempel på den motsatte implikasjonen, dvs. angi et idel som oppfyller $I = \mathcal{R}(I)$ uten at I er et primideal.

b) (6 poeng) La $V(I)$ være mengden av primidealer $\mathbf{p}$ i A, slik at $I \subseteq \mathbf{p}$. Vis at $I + J = (1)$ hvis og bare hvis $V(I) \cap V(J) = \emptyset$.

Løsning.

a) Vi har at $I \subseteq \mathcal{R}(I)$. La $x \in \mathcal{R}(I)$. Da kan vi finne en $n > 0$ slik at $x^n \in I$. Men siden I er et primideal så er $x \in I$.
Moteksempel, $(xy) \subset k[x, y]$. Dette er ikke et primideal, men idealet er lik sitt eget radikal, fordi $f^n \in (xy)$ betyr $f \in (xy)$. Alternativt eksempel, $(6) \subset \mathbb{Z}$ er ikke et primideal, men dersom en potens av et heltall er delelig med 6, så er tallet selv delelig med 6.

b) Vi har alltid at $V(I + J) \subseteq V(I) \cap V(J)$. Det betyr at dersom $V(I) \cap V(J) = \emptyset$, så er $V(I + J) = \emptyset$ og $I + J = (1)$, siden enhver ikke-enhet i A er inneholdt i et maksimalt ideal. Anta $V(I) \cap V(J) \neq \emptyset$. Da finnes et primideal $\mathbf{p}$ som inneholder både I og J. Men da inneholder det også $I + J$, og $I + J \neq (1)$.

Oppgave 3
La k være en kropp, og $A = k[x, y, z]/(x^2 - y^2, z^2 - x^2)$ en gradert k-algebra, hvor graden til generatorene x, y og z er 1. Vi lar $\lambda(A_n) = \dim_k(A_n)$.

a) (8 poeng) Finn Hilbertpolynomet $\lambda(A_n)$ til A. Hva er dimensjonen til A?

b) (5 poeng) La $\mathbf{m} = (x, y, z)$. Finn et $\mathbf{m}$-primært ideal med færrest mulige generatorer.

Løsning.

a) Modulo idealet $(x^2 - y^2, z^2 - x^2)$ kan alle monomer av grad n i A skrives som x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-1}z$ eller $x^{n-2}yx$. Det betyr at Hilbertpolynomet $\lambda(A_n) = 4$ for $n >> 0$, dvs. konstant eller av grad $d = 0$. Dermed har vi at dimensjonen til A er $dim(A) = d + 1 = 1$.

b) Vi skal finne et $\mathbf{m}$-primært ideal med presis en generator. Betrakt idealet $\mathbf{q} = (x)$. Vi har opplagt $(x) \subset (x, y, z)$. På den annen side har vi at $\mathbf{m}^3 = (x^3, x^2y, x^2z, xyz) \subset (x)$, og $\mathbf{m} \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{m}^3) = \mathcal{R}(\mathbf{q}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$. Det betyr at $\mathbf{q} = (x)$ er $\mathbf{m}$-primært.

Oppgave 4

a) (8 poeng) La B være hel over A, A og B integritetsområder, og $\mathbf{q}$ et ikke-null primideal i B. Vis at $\mathbf{q} \cap A \neq (0)$.

b) (5 poeng) La B være hel over A, A og B integritetsområder. Vis at $\dim(A) = \dim(B)$.

Løsning.

a) La $x \in \mathbf{q}$, $x \neq 0$. Siden $\mathbf{q} \subset B$ og B er hel over A, vil x tilfredsstille et monisk polynom

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

hvor $a_i \in A$. Det følger at $a_0 \in (x) \subset \mathbf{q}$, og $a_0 \in \mathbf{q} \cap A$. Dersom $a_0 = 0$ kan vi forkorte likningen med x (bruker at B er et integritetsområde), og gjenta argumentet. Dersom $a_i \neq 0$ for en $i = 1, 2, \ldots, n-1$ så følger det at $\mathbf{q} \cap A \neq 0$. Dersom alle $a_i = 0$, så har vi $x^n = 0$ og derfor $x = 0$, som gir en motsigelse. Altså er $\mathbf{q} \cap A \neq 0$.

b) La $(0) \subset \mathbf{p}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{p}_n \subset A$ være en kjede av primidealer. Vi har $(0) \subset B$ er et primideal siden B er et integritetsområde. Going-up-teoremet gir eksistens av en kjede av primidealer $(0) \subset \mathbf{q}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{q}_n \subset B$, slik at $\mathbf{q}_j \cap A = \mathbf{p}_j$. Det betyr at $\dim(A) \leq \dim(B)$.
La så $(0) \subset \mathbf{q}_1 \subset \ldots \mathbf{q}_n \subset B$ være en kjede av primidealer i B og betrakt kjeden $(0) \subseteq \mathbf{q}_1 \cap A \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{q}_n \cap A$ av primidealer i A. Anta $\mathbf{q}_i \cap A = \mathbf{q}_{i+1}$. Da er $B/\mathbf{q}_i$ hel over $A/(\mathbf{q}_i \cap A)$, begge er integritetsområder og $\overline{\mathbf{q}_{i+1}}$ er et ikke-null primideal i $B/\mathbf{q}_i$. Fra a) har vi da at $\mathbf{q}_{i+1} \cap (A/(\mathbf{q}_i \cap A) \neq 0$, og det følger at $\mathbf{q}_1 \cap A \neq \mathbf{q}_{i+1} \cap A$. Motsigelse og vi har $\dim(B) \leq \dim(A)$.

SLUTT