1. Del

Cartier-divisorer

Cartier-divisorer

Warning: En svært midlertidig versjon som er ikke er ferdig. Den er rotete og sikkert full av feil. Forbedring følger etterhvert!
versjon 0.2 — last update: 10/8/15 10:35:06 AM

(1.1) Vi starter ut med en noethersk ring A som er ekvidimensjonal av dimensjon én, der vi tar ekvidimensjonal i ordets strengeste betydning. For å gjøre dette presist introduserer vi primærkomposisjonen av nullidealet i A. Denne primærkomposisjonen er på formen $0 = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, der hvert av idealene $\mathfrak{q}_i$ er et primærideal, noe som betyr at radikalet $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ er et primideal. At A er ekvidimensjonal betyr at hvert av primæridealene $\mathfrak{q}_i$ oppfyller $\dim A/\mathfrak{q}_i = 1$. Det kan da ikke være noen inklusjonsrelasjoner mellom de forskjellige primæridealene $\mathfrak{q}_i$, og derfor kan ikke A ha noen embeddede komponenter. Radikalene $\mathfrak{p}_i$ til idealene som oppterer i primærkompsisjonen av nullidalet, er presis alle de minimale primidealene i A, og nulldivisorene i A er lik radikalenes union $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$.

For hvert maksimale ideal $\mathfrak{m}$ i A er $A_\mathfrak{m}$ en lokal ring av dimensjon én, og at A er uten embeddede komponenter, gir seg utslag i at det finnes elementer i det maksimale idealet $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ som ikke er nulldivisorer.

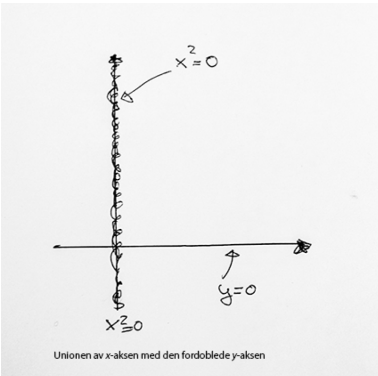
(1.2) En annen måte å si dette på er at alle de irredusible komponentene til $X = \operatorname{Spec} A$ er av dimensjon én og at X ikke har noen embeddede komponenter. Og med utgangspunkt i dette, gir vi følgende *ad hoc* definisjon til bruk i dette kurset. Med en *kurve* X skal vi forstå et noethersk og separert skjema som er ekvidimensjonalt av dimensjon én. Hvis $X = \bigcup_i X_i$ er komposisjonen av skjemaet X i dets irredusible komponenter, innebærer dette at hver X_i er av dimensjon én, og i tillegg har X har ingen embeddede komponenter.

(1.3) De generiske punktene til X betegner vi med η_i. Om $\operatorname{Spec} A$ er en åpen og tett affin mengde i X, så er A av den typen ring som ble beskrevet ovenfor. Primidealene $\mathfrak{p}_i$ tilsvarer de generiske punktene η_i, og vi har at den lokale ringen til X i η_i er relatert til A ved likheten $A_{\mathfrak{p}_i} = \mathcal{O}_{X,\eta_i}$. Disse lokale ringene er alle ringer av Krull-dimensjon null (idealet $\mathfrak{p}_i$ er et minimalt primideal) og derfor av endelig lengde siden A er noethersk. Vi lar $\nu_i = \nu(X_i)$ betegne denne lengden, og vi kaller ν_i for *multiplisiteten* til komponenten X_i i X. Det er slik at komponenten X_i er redusert, hvis og bare hvis dens tilsvarende multiplisiteten oppfyller $\nu_i = 1$. Dette er også ekvivalent med at den lokale ringen $\mathcal{O}_{X,\eta_i}$ er en kropp, isåfall er den lik funksjonskroppen $K(X_i)$.

(1.4) Et eksempel kan være $x^2y = 0$ i $\operatorname{Spec} k[x,y]$, som geometrisk er unionen av x-aksen i det affine planet $\mathbb{A}^2_k$ med den fordoblede y-aksen. Da er $A = k[x,y]/(x^2y)$. Primær komposisjonen av nullidealet er $0 = (x^2) \cap (y)$. I dette tilfellet har X to komponenter, $X_1 = \operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2)$, som har støtte langs y-aksen, og $X_2 = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y) = k[x]$ med støtte langs x-aksen. Det er riktig at $\mathcal{O}_{X,\eta_1} = k(y)[x]/(x^2)$ som er av lengde to; vi har jo den eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow k(y) \xrightarrow{\alpha} k(y)[x]/(x^2) \longrightarrow k(y) \longrightarrow 0$$

der $\alpha(a) = ax$. Det betyr at X_2 har multiplisiteten $\nu_1 = 2$ i X. Det er klart at $\mathcal{O}_{X,\eta_2} = \operatorname{Spec} k(x)$ og derfor er X_2 av multiplisiet $\nu_2 = 1$ i X. Den er også en *enkel* og *redusert* komponent



Den totale kvotientringen

Dersom A er et integritetsområde er kvotientkroppen $K(A)$ et velkjent objekt. Den betsår av alle brøker a/b der a og b er elementer i A med $b \neq 0$, og to slike brøker, a/b og a'/b', er like hvis og bare hvis likheten $ab' = a'b$, som fremkommer ved "kryssmultiplikasjon", holder i ringen A. I det som følger skal vi generalisere denne konstruksjonen til noethrske ringer uten embeddede komponenter.

For et øyeblikk forlater vi altså vår stående hypotesen om å arbeide med kurver og lar A være en noethersk ring, men vi opprettholder allikevel antagelsen om at A

ikke har embeddede komponenter. Vil lar $0 = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ være primærkomposisjonen av nullidealet og betegner med $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de assosierte primidealene. At A er uten embeddede komponenter er ensbetydende med at det ikke er noen inklusjonsrelasjoner mellom $\mathfrak{p}_i$-ene, eller sagt annerledes, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ er presis de minimale primidealene i A.

(1.5) Den *totale kvotientringen* til A betegner vi med $K(A)$. Det er intet annet en lokaliseringen A_S der $S \subseteq A$ er det multiplikativt lukkede systemet bestående av alle ikke-nulldivisorer i A. Elementene i $K(A)$ er på formen $s^{-1}a$ der s er en ikke-nulldivisor og a et vilkårlig element fra ringen A. To slike, $s^{-1}a$ og $t^{-1}b$, er like hvis og bare hvis $ta = sb$. I definisjonen av en lokalisering forlanges det riktig nok at $u(sb - ta) = 0$ for en u fra det multiplikative systemet, men siden alle elementene der er ikke-nulldivisorer, følger det at $sb = ta$. Spesielt vil lokaliseringsavbildningen $A \to K(A)$ være injektiv.

(1.6) Dannelsen av den totale kvotientringen oppfører seg pent ved lokalisering; eller mer generelt: Dannelsen er funktoriell langs *flate* ringavbildninger. Dersom $\phi\colon A \to B$ er en *flat* ringavbildning, så tas nemlig ikke-nulldivisorer på ikke-nulldivisorer, og vi får indusert en kanonisk avbildning $K(A) \to K(B)$ ved rett og slett å sende $s^{-1}a$ på $\phi(s^{-1})\phi(a)$; noe som er meningsfylt siden $\phi(s)$ er en ikke-nulldivisor i B. Den induserte avbildningen avhenger opplagt funktorielt av avbildningen ϕ. Nå vet vi at lokaliseringer alltid er flate, og den første påstanden følger. (Det er forøvrig ganske trivielt å sjekke at om $S \subseteq A$ er et multiplikativt system, så sendes en ikke-nulldivisor på en ikke-nulldivisor ved lokaliseringsavbildningen $A \to A_S$) KvotRingFlate

(1.7) Dersom A er et integritetsområde, er selvsagt $K(A)$ lik kvotientkroppen til A, og om A er lokal med bare ett assosiert primideal $\mathfrak{p}$, så er $K(A) = A_{\mathfrak{p}}$. Mer generelt siden A ikke har embeddede komponenter, har vi en god beskrivelse av den total kvotientringen. Ringen $K(A)$ er en semilokalring hvis maksimale idealer er idealene $\mathfrak{p}_i K(A)$. Vi lokaliserer jo i komplementet til union av alle minimale primidealen, så om $\mathfrak{p}$ er et pirmideal som overlever i $K(A)$ må $\mathfrak{p}$ ligge inne i $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$ og derfor inne i ett av de minimale primidalen, og de to må falle sammen. Det klart at idealene $\mathfrak{p}_i K(A)$ også er minimale primidealer siden $\mathfrak{p}_i$-ene er det. Følgelig er $K(A)$ en ring av endelig lengde, og vi har identiteten

$$K(A) \simeq \bigoplus_i K(A)_{\mathfrak{p}_i}$$

Denne kan forbedres betraktelig

Lemma 1.1 *La A være en noethersk ring uten embedde komponenter og la $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ være de minimale primidealene i A. Da har vi en kanonisk isomorfi* TotKvotRingLokali

$$K(A) \simeq \bigoplus_i A_{\mathfrak{p}_i}.$$

BEVIS: Etter hva vi sa i begynnelsen av denne paragrafen, er det nok å vise at den kanoniske avbildningen $K(A)_{\mathfrak{p}} \to K(A_{\mathfrak{p}})$ er en isomorfi for alle primidealer $\mathfrak{p}$. Dette følger enkelt dersom vi kan vise at $K(A)_f \to K(A_f)$ er en isomorfi for et hvert element i A som ikke er nilpotent, fordi vi for hver f har et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} K(A)_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & K(A_{\mathfrak{p}}) \\ K(A)_f \arrow[r] \arrow[u] & K(A_f) \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

og ethvert element i $K(A_{\mathfrak{p}})$ ligger i bildet av $K(A_f)$ for en passende f— et slikt element er på formen $s = b/f$ for $b \in A$ og $f \notin \mathfrak{p}$. Dette viser at avbildningen $K(A)_{\mathfrak{p}} \to K(A_{\mathfrak{p}})$ er surjektive, og det er rett frem etter nesen å verifisere at den er injektiv. ❑

Vi skal altså vise

Lemma 1.2 *Dersom $f \in A$ ikke er nilpoten, så har vi en kanonisk isomorfi $K(A)_f \simeq K(A_f)$.*

BEVIS: Avbildningen er den som sender $(ca^{-1})f^{-n}$ til $(cf^{-n})a^{-1}$, og igjen er det kun surjektiviteten som krever et substansielt argument. Trøbbelmakerne er de elementer $a \in A$ som er nulldivisorer i A, men ikke i lokaliseringen A_f — da finnes jo $1/a$ i $K(A_f)$, mens $1/a$ ikke i eksisterer i $K(A)$, og dermed er det ikke *a priori* klart at $1/a$ ligger i bildet av $K(A)_f$. Trikset er i bunn og grunn å modifisere a med en b slik at $a + b$ blir en ikke-nulldivisor i A og slik at $fb = 0$. Det betyr at b må velges slik at den forsvinner langs alle komponentene til $\operatorname{Spec} A$ der a ikke forsvinner identisk. At A ikke er redusert gjør livet noe mere komplisert, og vi må bruke passende potenser av a, b og f:

Siden a er en nulldivisor, ligger a i enkelte at de minimale primidealene, så vi nummerere dem slik at disse er $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$. De resterende er da $\mathfrak{p}_{s+1}, \dots, \mathfrak{p}_r$. La oss se nærmere på betingelsen at a ikke er en nulldivisor i A_f. Primærdekomposisjon av nullidealet i A_f er jo snittet $\bigcap \mathfrak{q}_i A_f$ av de $\mathfrak{q}_i$-ene slik at $f \notin \mathfrak{p}_i$. At a er en ikke nulldivisor i A_f, betyr derfor at om $a \in \mathfrak{p}_i$, så er også $f \in \mathfrak{p}_i$.

Velg et element $b \in \bigcap_{i \geq s+1} \mathfrak{p}_i$ men ikke i noen av $\mathfrak{p}_i$-ene for $i \leq s$. Da er ligger fb i $\bigcap_i \mathfrak{p}_i$ og er derfor nilpotent; la oss si at $f^m b^m = 0$. Summen $a^m + b^m$ er ikke en nulldivisor i A fordi a og b er valg slik at

$$\text{om } i \leq s, \text{ så er } a^m \in \mathfrak{p}_i \text{ og } b^m \notin \mathfrak{p}_i \tag{1.1}$$

$$\text{om } i \geq s+1, \text{ så er } a^m \notin \mathfrak{p}_i \text{ og } b^m \in \mathfrak{p}_i \tag{1.2}$$

hvilket betyr at $a^m + b^m$ ikke ligger noen av de minimale primidealene $\mathfrak{p}_i$.

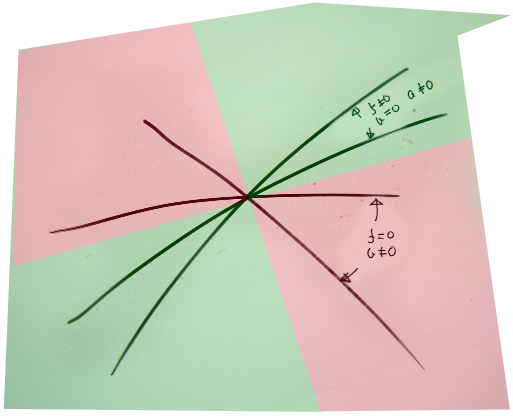
I lokaliseringen A_f gjelder nå likheten

$$\frac{a^{m-1}}{a^m + b^m} = \frac{1}{a}$$

fordi vi i A har at $f^m b^m = 0$ og derfor

$$f^m a^m = f^m a^m + f^m b^m$$

❑



(1.8) På figuren har vi indikert at Spec A har fire komponenter. Elementet f forsvinner langs to av dem (de røde) slik at Spec A_f er en åpen mengde inneholdt i de to andre (de grønne). At a ikke er nulldivisor i Spec A_f betyr at a ikke forsvinner identisk langs de to komponentene i grønnsektor, men a kan gjerne forsvinne identiske på komponenter i rød sektor og skjer det, er a en nulldivisor i A. Vi velger en b slik at b forsvinner langs komponenten i grønn sektor, men ikke langs de i rød. Da er $a + b$ ikke en nulldivisor, for om $c(a + b) = 0$ må c forsvinne identisk langs alle komponenter siden enten a eller b men ikke begge forsvinner langs en komponent. Det er også slik at $fb = 0$, og derfor er $a + b = a$ langs enhver komponent der $f \neq =$.

(1.9) Et ummiddelbart korollar er følgende

Lemma 1.3 *For A noetherske ringer A uten embeddede komponenter kommuterer dannelsen av den totale kvotientringen med lokalisering; i.e., om $S \subseteq A$ er et multiplikativt system, så er gir den kanoniske avbildningen en isomorfi $K(A_S) \simeq K(A)_S$.* TotKvotRingLokali

Hypotesen om at A er uten embeddede komponenter er essensiell, *e.g.*, anta at A kun har to assosierte primidealer $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, og velg et element $f \in \mathfrak{m}$ som ikke ligger i $\mathfrak{m}$. Da er $K(A) = A\mathfrak{m}$ og $K(A_f) = A_\mathfrak{p}$ siden det eneste assosierte primifealet til A_f er $\mathfrak{p}A_f$. Det klart at generelt, vil $A_\mathfrak{p}$ og $(A_\mathfrak{m})_f$ være forskjellige.

Knippet av rasjonale funksjoner

La nå X være et noethersk skjema uten embeddede komponenter. Vi skal definere knippet $\mathcal{K}_X$ av rasjonale funksjoner på X. Seksjonene over en åpen $U \subseteq X$ skal være den totale kvotientringen til seksjonene av $\mathcal{O}_X$ over U, altså lik $K(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$. For å definere restriksjonsavbildningene observerer vi at hvert par $U \subseteq V$ av åpne mengder så er restriksjonsavbildningen $\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ en flat ringavbildning, og slike induserer en kanonisk avbildning mellom de tilhørende totale kvotientringer, som vi så i 1.6 ; det er avbildningen $K(\Gamma(U, \mathcal{O}_X)) \to K(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$ som sender ab^{-1} til $(\mathrm{res}^V_U\, a)(\mathrm{res}^V_U\, b)^{-1}$. Dette gir oss opplagt et preknippe, som vi strengt tatt må knippifisere.Vi har følgende

KnippeAvRasjonal

Setning 1.1 *Anta at X er et noethersk skjema uten embeddede komponenter og la $\eta_1, \ldots, \eta_r$ betegne de generiske punktene til X. Da er knippet $\mathcal{K}_X$ kvasikoherent og flasque, og for alle åpne undermengder U i X gjelder det at*

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) \simeq \bigoplus_{\eta_i \in U} \mathcal{O}_{X,\eta_i}.$$

label

BEVIS: Det er rett frem å sjekke at formelen på høyre side av likheten (1.1) definerer et *knippe* på X med restriksjonsavbildninger gitt som passende projeksjoner. Det er da nok å sjekke at formelen gjelder for alle affine åpne undermengder. Men om $U = \operatorname{Spec} A$ er affin, har vi lemma 1.1 på side 3 som fortellere oss presis det.

Fra lemma 1.3 følger det at $\mathcal{K}_X$ er kvasikoherent, og at der er flasque er trivielt med en gang (1.1) er etablert. ❏

Det er også klart at vi har

$$\Gamma(U, \mathcal{K}^*_X) \simeq \bigoplus_{\eta_i \in U} \mathcal{O}^*_{X,\eta_i}.$$

label

slik at også $\mathcal{K}^*_X$ er flasque.

(1.10) Vi lar $K(X)$ betegne globalseksjonene til $\mathcal{K}_X$. Dersom $X = \bigcup_i X_i$ er oppspaltningen av X i dets irredusible komponenter, er $K(X) = \bigoplus_i K(X_i)$. Å gi en rasjonal funksjon på X er rett å slett å gi en rasjonal funksjon på hver av komponenten—uten å ta hensyn til om de stemmer overens på snittene mellom komponentene. De kan også være identisk lik null langs enkelte komponenter. Elementene i $K(X)^*$ må være invertible på hver komponent, og det betyr at ingen av restriksjonene er nulldivisorer.

Dersom X_i er redusert, er $K(X_i)$ en kropp—den gode gammeldagse funksjonskroppen til X_i. Dersom X_i ikke er redusert, er $K(X_i)$ en ring av endelig lengde. Lengden av $K(X_i)$ kaller vi *multiplisiteten* til komponenten X_i.

For å gi en viss indikasjon på hvordan $K(X)$ kan se ut i tilfellet X har nilpotenter, ser vi på den dobbelte x-aksen i $\mathbb{A}^2_k$. Den er lik $\operatorname{Spec} k[x,y]/y^2$, og den har (y) som sitt eneste minimale primideal. Lokaliserer vi i det, finner vi ringen $k(x)[y]/y^2$. Elementene i denne ringen er alle på formen $f(x)+g(x)y$ der $f(x)$ og $g(x)$ kommer fra den rasjonale funksjonskroppen $k(x)$.

Cartier-divisorer

(1.11) Knippet $\mathcal{O}_X$ av regulære funksjoner på X er et underknippe av $\mathcal{K}_X$. Begge er knipper av ringer, og det er klart at $\mathcal{O}_X$ er et underknippe av ringer. For de multiplikative gruppene av enheter finner vi derfor følgende eksakte følge:

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^*_X \longrightarrow \mathcal{K}^*_X \longrightarrow \mathcal{K}^*_X/\mathcal{O}^*_X \longrightarrow 1. \tag{1.3}$$

Knippet $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ kaller vi for *knippet av Cartier-divisorer* på X, og en seksjon i $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ er en *Cartier-divisor*, eller kortere en *divisor* på X. Vi betegner gruppen av divisorer med $\operatorname{Div} X$, og gruppeoperasjonen i denne gruppen skrives tradisjonelt additivt. KortEksakt

(1.12) La oss se nøyere på hva som ligger i en divisor. Anta at $\{U_i\}_{i\in I}$ er en endelig åpen overdekning av X. Da er seksjonene til $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ gitt ved standardsekvensen

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_{ij}, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*).$$

En divisor D er således gitt ved seksjoner σ_i av $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ over de åpne mengdene U_i som stemmer overens på snittene $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Hvis vi innskrenkere mengdene U_i noe, kan vi anta at σ_i er indusert av en seksjon f_i av $\mathcal{K}_X^*$ over U_i. For å forstå hva det betyr at to slike stemmer overens på snittet U_{ij}, må vi ha i mente at de er seksjoner av $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Likheten $\sigma_i|_{U_{ij}} = \sigma_j|_{U_{ij}}$ oversettes ved at $f_i|_{U_{ij}}(f_j|_{U_{ij}})^{-1}$ er en seksjon av $\mathcal{O}_X^*$ over U_{ij}, eller i kortform: Det finnes seksjoner c_{ij} av $\mathcal{O}_X^*$ over U_{ij} slik at likheten $f_i = c_{ij} f_j$ holder over U_{ij}. Vi kaller parene (U_i, f_i) for *lokale definerende data* for divisoren D.

(1.13) Seksjonene c_{ij} tilfredstiller følgende tre ligninger, som følger enkelt bare man husker på at f_i-ene ikke er nulldivisorer — de er jo seksjoner av $\mathcal{K}_X^*$: kosykelbet

- $c_{ik} = c_{ij} c_{jk}$
- $c_{ji} = c_{ij}^{-1}$
- $c_{ii} = 1$

Den første av disse kalles ofte for *kosykelbetingelsen*, og gitt den første, er det lett å se at de to siste er ekvivalente.

(1.14) Lokale definerende data er selvsagt ikke entydig. To familier (U_i, f_i) og (V_j, g_j) bestemmere samme divisor hvis og bare hvis de lapper sammen til samme seksjon av $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$, og det skjer hvis og bare hvis restriksjonene $f_i|_{U_i\cap V_j}$ og $g_j|_{U_i\cap V_j}$ blir like i $\Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ for alle par av indekser i og j. Det vil si at $f_i|_{U_i\cap V_j} = d_{ij} \cdot g_j|_{U_i\cap V_j}$ for enheter d_{ij} i $\Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{O}_X^*)$.

Det er likeledes klart at om D og D' er to dividorer, så kan vi finne en felles trivialiserende overdekning $\{U_i\}$ for de to. Dersom (U_i, f_i) og (U_i, f_i') er lokale data for henholdsvis D og D' vil $D + D'$ være representert ved $(U_i, f_i f_i')$ og $-D$ ved (U_i, f_i^{-1}). Det nøytrale elementet i D—altså nulldivisoren—er representert ved de lokal dataene $(X, 1)$.

(1.15) Vi sier at en rasjonal funksjon f på X ikke forsvinner identisk på komponenten X_i om restriksjonen $f|_{X_i}$ ikke er nilpotent. Dette er ekvivalent med at den induserer en ikke-nulldivisor i den lokale ringen $\mathcal{O}_{X,\eta_i}$ i det generiske punktet η_i.

Em rasjonal funksjon på X som ikke l forvinner identisk på noen komponent, er ikke annet enn en global seksjon av $\mathcal{K}_X^*$. Den induserer derfor en divisor som vi skriver (f). Slike divisorer kalles for *hoveddivisorer*, og de kan representeres ved lokale data (X, f). Bildet av $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ inn i $\operatorname{Div} X$ betegner vi med P_X. Det er selvsagt en undergruppe og består av alle hoveddivisorer.Vi har en eksakt sekvens:

$$1 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \longrightarrow \operatorname{Div} X \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow 0, \tag{1.4}$$

LangEksakt der vi bruker at $H^1(X, \mathcal{K}_X^*) = 0$ siden $\mathcal{K}_X^*$ er flasque (se (1.9) på side 6). Kvotienten $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Div} X / P_X$, som altså er isomorf med kohomologigruppen $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, kalles ofte for *divisorklassegruppen* eller også *Picard-gruppen*[1] til X, og den betegnes med $\operatorname{Pic} X$. Dersom to divisorer D og D' er gitt ved de lokale dataene f_i og f_i' med hensyn til en felles trivialiserende overdekning $\{U_i\}$ ved henholdsvis familiene f_i og f_i' definerer den samme klassen i divisorklassegruppen om de er like på en global rasjonal funksjon nær; det vil si om det finnes en $c \in K(X)^*$ slik at $f_i = cf_i'$ for alle i. Vi sier også at divisorene D og D' er *lineært ekvivalente* og skriver $D \equiv D'$.

OPPGAVE 1.1. La A og B være to ringer og anta at det er gitt en surjeksjon $A \to B$ mellom dem som har kjerne I. Dersom $I^2 = 0$, vis at $1 + I$ er en multiplikativ undergruppe av enhetsgruppen A^* som er isomorf med den addiditive gruppen I, og at vi har en eksakt sekvens

$$1 \longrightarrow 1 + I \longrightarrow A^* \longrightarrow B^* \longrightarrow 1.$$

Generaliser til skjemaer. ✷

OPPGAVE 1.2. Dersom $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$ er en dobbelt linje, vis at $\operatorname{Cl} X \simeq \mathbb{Z}$ (man kan bruke at $\operatorname{Pic} \mathbb{P}_k^1 = \mathbb{Z}$). ✷

OPPGAVE 1.3. La $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$ være et dobbelt kjeglesnitt. Vis at $\operatorname{Pic}^X \simeq \mathbb{Z} \oplus k^3$. ✷

Invertible knipper

En $\mathcal{O}_X$-modul L kalles *invertibel* om de finnes en åpen overdekning $\{U_i\}$ av X slik at $L|_{U_i}$ er isomorf med $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ for hver i. Om $\psi_i \colon \mathcal{O}_X|_{U_i} \to L|_{U_i}$ er en isomorfi, kaller vi $g_i = \psi_i(1)$ for en *lokal generator* for L, og vi sier at overdekningen $\{U_i\}$ *trivialiserer* L. den inverseavnildningen ψ_i^1 er bestemt ved at den sender g_i på 1, og ved anledning skal vi betegne den med ψ_{g_i}.

Det er ikke vanskelig å sjekke at en koherent $\mathcal{O}_X$-modul L er en invertibel $\mathcal{O}_X$-modul hvis og bare hvis stilken L_x er isomorf med den lokale ringen $\mathcal{O}_{X,x}$ for hvert punkt $x \in X$.

[1] Man kan definere divisorer på generelle skjemaer, som kan ha embeddede komponenter, men da er ikke divisorklassegruppen og Picardgruppen det samme.

(1.16) Poenget i denne paragrafen er at isomorfiklassene til de invertible $\mathcal{O}_X$-modulene på X danner en *abelsk gruppe* med gruppeoperasjon indusert av tensorproduktet. Denne gruppe kalles for *Picard-gruppen* til X og betegnes med $\operatorname{Pic} X$.

Setning 1.2 *Vi har følgende de L, L_1 og L_2 alle er invertible $\mathcal{O}_X$-moduler.*

- *$L_1 \otimes L_2$ er en invertibel $\mathcal{O}_X$-modul. Om g_1 og g_2 er lokale generatorer for L_1 og L_2, så er $g_1 \otimes g_2$ en lokal generator for tensorproduktet $L_1 \otimes L_2$.*
- *$\operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_X)$ er invertibel. Om g er en lokal generator for L, så er ψ_g gitt ved at $\psi_g(ag) = a$ en lokal generator for $\operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_X)$.*
- *$\operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_X) \otimes L \simeq \mathcal{O}_X$. Derfor er $L^{-1} = \operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_X)$*
- *$\operatorname{Hom}(L, M) \simeq L^{-1} \otimes M$.*

BEVIS: Vi kan finne en felles trivialiserede overdekning for L_1 og L_2, og om U er en åpen der vi har isomorfier $\psi_i \colon \mathcal{O}_U \to L_i|_U$ med $\psi_i(1) = g_i$. Vi har følgende sekvens av isomorfier

$$\mathcal{O}_U \simeq \mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U \simeq L_1|_U \otimes L_2|_U$$

der den første sender $1 \mapsto 1 \otimes 1$ og den andre er $\psi_1 \otimes \psi_2$ som sender $1 \otimes 1$ til $g_1 \otimes g_2$. Den første påstanden følger.

At ψ_g vil være en generator for $\operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_X)|_U$, om g er en generator for $L|_U$, følger fra isomorfiene isomorfiene

$$\mathcal{O}_X \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \simeq \operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_X)|_U$$

der den første sender 1 til $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$ og den andre α til $\alpha \circ \psi^{-1}$. Men det betyr jo at $1 \mapsto \psi^{-1} = \psi_g$. ❏

(1.17) KNIPPET TILORDNET EN DIVISOR. Til enhver divisor D kan man tilordne en invertibel $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{O}_X(D)$. Det gjøres på følgende måte: La (U_i, f_i) være lokale data for D. På U_i har vi underknippet $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i}$. Det er isomorft med $\mathcal{O}_{U_i}$ og har f_i^{-1} som generator. Over en affin $U = \operatorname{Spec} A \subseteq U_i$, for eksempel, er seksjonene til dette knippet lik $f_i^{-1}A \subseteq K(A)$.

På snittet $U_{ij} = U_i \cap U_j$ er jo $f_i = c_{ij} f_j$ der c_{ij} er en invertibel seksjon av $\mathcal{O}_{U_{ij}}$. Det betyr at $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_{ij}} = f_j^{-1}\mathcal{O}_{U_{ij}}$ som underknipper av $\mathcal{K}_X|_{U_{ij}}$. I det affine tilfellet, *i.e.*, dersom $U_{ij} = \operatorname{Spec} A$, er det snakk om underknippene $f_i^{-1}A$ og $f_j^{-1}A$ av $K(A)$, og de er like fordi c_{ij} er en enhet, og følgelig er $c_{ij}A = A$.

Vi har nå konstruert et knippe på hver åpen U_i, som stemmer overens på snittene U_{ij}. For at de skal kunne limes sammen til et knippe på hele X, er det også en kosykelbetingelse som må være oppfylt, men siden vi arbeider med underknipper av et gitt knippe, og sammenlappingsfunksjonen på snittene faktisk alle er identiteten, er kosykelbetingelsen automatisk oppfyllt, og knippene $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ kan lappes sammen til et invertibelt knippe $\mathcal{O}_X(D)$ definert på hele X.

Det er en liten øvelse å verifisere at to forskjellige sett av lokale definerende data for divisoren D gir opphav til identiske underknipper av $\mathcal{K}_X$. Dersom (U_i, f_i) og (V_j, g_j) er de to settene, finnes invertible seksjoner d_{ij} over $U_i \cap V_j$ av $\mathcal{O}_X$ slik at $f_i = d_{ij}g_j$. Det er klart at $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i \cap V_j} = g_j^{-1}\mathcal{O}_{V_i \cap V_j}$, siden d_{ij}-ene er invertible funksjoner, og vi er fremme ved hjelp av oppgaven nedenfor.

OPPGAVE 1.4. La F være et knippe på et topologisk rom X og La G og G' være to underknipper. Anta at vi har en åpen overdekning $\{U_i\}$ av X slik at $G|_{U_i} = G'|_{U_i}$. Vis at $G = G'$. ✱

(1.18) Divisor lever i gruppen $\operatorname{Div} X$ og invertible $\mathcal{O}_X$-moduler lever i gruppen $\operatorname{Pic} X$, og det er selvsagt å forvente at tilordningen $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ er kompatibel med de to gruppestrukturene, slik neste setning forteller oss. Den forteller oss også når to divisorer gir opphav til isomorfe $\mathcal{O}_X$-moduler:

DivPicGrpHomo **Setning 1.3** *Anta D og D' er to Cartier-divisorer på X, og at X, som vanlig er et noethersk og separert skjema uten embeddede komponenter. Da gjelder følgende to likheter:*

- ☐ $\mathcal{O}_X(D + D') \simeq \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(D')$
- ☐ $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(D')$ *hvis og bare hvis D og D' er lineært ekvivalente.*

BEVIS: La $\{U_i\}$ være en felles trivialiserende overdekning for divisorene D og D', og anta at de er gitt ved henholdsvis de lokale dataen (U_i, f_i) og (U_i, f_i'). Da er $D + D'$ gitt ved $(U_i, f_i f_i')$. Lokalt over U_i er $\mathcal{O}_X(D + D')$ definert som underknipper $f_i^{-1}f_i'^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$. Tensor produktet er lokalt gitt som $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i} \otimes f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$, som klart er isomorft med $f_i^{-1}f_i'^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ via den nærmest banale avbidningen $af_i^{-1} \otimes bf_i'^{-1} \mapsto abf_i^{-1}f_i'^{-1}$.

For å vise den andre påstanden, er det med henvisning til den først, nok å sjekke at $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X$ hvis og bare hvis D er en hoveddivisor. Anta at $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$ er en undermodul som er isomorf med $\mathcal{O}_X$. Da vil bildet av 1 i $\mathcal{K}_X$ være en global seksjon av $\mathcal{K}_X$, altså en rasjonal funskjon på X, som genererer $\mathcal{O}_X(D)$ over alt. Det betyr at (X, f) er definerende data for D, og følgelig har vi at $D = (f)$. Omvendt, dersom (X, f) er definerende data for D, så er $\mathcal{O}_X(D) = f^{-1}\mathcal{O}_X$, og multiplikasjon med f gir en isomorfi $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X$. ❑

(1.19) Den andre påstanden i setning 1.3 i forrige paragraf forteller oss at avbildningen $\operatorname{Div} X \to \operatorname{Pic} X$ har undergruppen P_X av hoveddivisorer som kjerne. Det betyr at den avledede avbildningen $\operatorname{Div} X/P_X \to \operatorname{Pic} X$ er injektiv, og således ligger divisorklassegruppen som en undergruppe av Picard-gruppen. Vi skal i denne paragrafen se at med vår stående hypotese om fravær av embeddede komponenter i X, vil $\operatorname{Div} X \to \operatorname{Pic} X$ også være surjektiv, og følgelig er divisorklassegruppen og Picard-gruppen isomorfe.

PicOgDivClass **Setning 1.4** *Anta at X er et noethersk og separert skjema som ikke har embeddede komponenter. Da er avbildningen $\operatorname{Div} X \to \operatorname{Pic} X$ gitt som $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ surjektiv. Følgelig er divisorklassegruppen $\operatorname{Div} X/P_X$ isomorf med $\operatorname{Pic} X$.*

BEVIS: At avbildningen er injektiv viste vi som sagt ovenfor. For å etablere at den er surjektiv er det tilstrekkelig å vise at enhver invertibel $\mathcal{O}_X$-modul er en undermodul av $\mathcal{K}_X$: Om $L \subseteq \mathcal{K}_X$, la $\{U_i\}$ være en trivialiserende overdekning for L, og la g_i være lokale generatorer. Da er $L|_{U_i} = g_i\mathcal{O}_{U_i} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i}$, og g_i-ene er rasjonale funksjoner på U_i, som ikke kan være nulldivisorer fordi $\mathcal{O}_{U_i} \simeq g_i\mathcal{O}_{U_i}$ Siden $g_i\mathcal{O}_{U_{ij}} = L|_{U_{ij}} = g_j\mathcal{O}_{U_{ij}}$ følger det friksjonsfritt at $g_i = c_{ij}g_j$ for en enhet c_{ij} på U_{ij}, og dermed er (U_i, g_i^{-1}) er et sett av lokale data for en divisor D, og da ligger det i dagen at $L = \mathcal{O}_X(D)$.

De forskjellige irredusible komponentene til X betegner vi med X_i, der $1 \leq i \leq r$. Gitt en $\mathcal{O}_X$-modul $L \in \operatorname{Pic} X$. For hver i, med $1 \leq i \leq r$, la $U_i \subseteq X_i$ være en åpen og ikke-tom undermengde som ikke treffer noen av de andre irredusible komponentene til X, og som fremfor alt er slik at restriksjonen av L til U_i er triviell; *i.e.*, $L|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$. La $U = \bigcup_i U_i$. Det er den *disjunkte* unionen av U_i-ene, og følgelig er $L|_U$ triviell. Videre betegner $i\colon U \to X$ inklusjonen.

Den første observasjonen vi gjør, er at den kanoniske avbildningen $\mathcal{K}_X \to i_*\mathcal{K}_U$ er en isomorfi. Dette følger fordi et generisk punkte til X ligger i en åpen undermengde V av X hvis og bare hvis det ligger i $U \cap V$, og dette gir isomorfiene

$$\Gamma(V, \mathcal{K}_X) \overset{1}{\simeq} \prod_{\eta_i \in V} \mathcal{O}_{X,\eta_i} = \prod_{\eta_i \in V \cap U} \mathcal{O}_{X,\eta_i} \overset{2}{\simeq} \Gamma(V \cap U, \mathcal{K}_U) \overset{3}{=} \Gamma(V, i_*\mathcal{K}_U)$$

der isomorfiene merket med 1 og 2 kommer fra setning 1.1 på side 6, mens likheten merket 3, ikke er annet enn definisjonen av i_*.

Det andre poenget er at den kanoniske avbildningen $L \to i_*L|_U$ er injektiv. Ved eventuelt å å gjøre U mindre, kan vi anta at $U \cap V = \operatorname{Spec} A_f$ og $V = \operatorname{Spec} A$, og at $L|_V = \widetilde{P}$. Da er $L|_{U\cap V} = \widetilde{P}_f$, og oppgaven vår er å vise at $P \to P_f$ er injektiv. Siden U treffer alle de irredusible komponentene til V, ligger ikke f i noen av de assosierte primidealene til A og f er ikke en nulldivisor i A. Nå er P lokalt isomorf med A, og f er derfor heller ikke noen null-divisor i P. Det følger at $P \to P_f$ er injektiv.

Disse to observasjonene gir oss det vi vil ha:

$$L \subseteq i_*L|_U = i_*\mathcal{O}_U \subseteq i_*\mathcal{K}_U \simeq \mathcal{K}_{\mathcal{X}}.$$

❏

(1.20) På side 8 etablerte vi den eksakte sekvensen (1.4) som vi gjengir nedenfor. Den er avledet av den kort-eksakte sekvensen (1.3) på side 6 og henger på at $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}{}^*$ er et flasque knippe når X er noethersk og uten embeddede komponenter.

$$1 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \xrightarrow{\gamma} \operatorname{Div} X \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow 0, \qquad (1.5)$$

Gruppehomomorfien $\operatorname{Cl} X = \operatorname{Div} X \to \operatorname{Pic} X$ har presis bildet til γ som kjerne, og den induserer derfor en isomorfi $\operatorname{Div} X/P_X \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Så følgende tre grupper faller sammen: $\operatorname{Cl} X$, $\operatorname{Pic} X$ og $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. LangEksakt2

I paragraf (1.13) på side 7 assosierte vi en 1-kosykel $\{c_{ij}\}$ til en divisor gitt lokale data basert på en overdeknig $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Det gir oss et element i Check-gruppen $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, som etter litt arbeid med forskjellige overdekninger og sammenhengen mellom Check-cohomologi og knippekohomologi, gir oss et element i $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Det er fullt mulig å reversere denne prosessen, og således gi et alternativt bevis for setning 1.4 ovenfor.

Effektive divisorer

(1.21) Vi kaller en divisor D *effektiv* og skriver $D \geq 0$ dersom den kan representeres ved lokale data (U_i, f_i) slik at funksjonene f_i, som *a priori* kun er seksjoner av $\mathcal{K}_X$ over U_i, faktisk er seksjoner av $\mathcal{O}_X$ over U_i. Man sjekker lett at om dette gjelder for ett sett av definerende data, gjelder det for alle andre også.

Vi skriver $D \geq D'$ dersom $D - D' \geq 0$, og det er slik at om begge divisorene D og D' er effektive, så gjelder det samme for $D + D'$. Det betyr at $\operatorname{Pic} X$ er en ordnet gruppe.

(1.22) Effektive divisorer spiller en gjennomgripende rolle i algebraisk geometri; de er bærere av vesentlig geometrisk informasjon. At D er effektiv, er ensbetydende med at $\mathcal{O}_X(-D)$ faktisk er inneholdt i underknippet $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{K}_X$, for $\mathcal{O}_X(-D)$ er jo lokalt på formen $f_i\mathcal{O}_X$. Undermodulen $\mathcal{O}_X(-D)$ i $\mathcal{O}_X$ er koherent ideal som lokalt er generert av ett element. Det er således et lokalt hovedideal. Det lukkede underskjemaet som dette idealet definerer, betegner vi også ofte med D, noe som selvsagt er å maltraktere notasjonen, dog innenfor en akseptabel ramme. Likeledes omtales ofte også underskjemaet som en divisor. Vi har den kort-eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0, \tag{1.6}$$

FundSekvens som det skal vise seg er grunnleggende.

(1.23) I forrige paragraf så at en effektiv divisor var tilordnet et lukket underskjema på en naturlig måte. Det omvendte gjelder også: Om $D \subseteq X$ er et lukket underskjema som lokalt er gitt ved én ligning som ikke er en nulldivisor, kan vi rundt hvert punkt $x \in X$ finne en affin omegn U_x og et element $f_x \in A = \Gamma(U_x, \mathcal{O}_X)$ med $D = V(f_x) = \operatorname{Spec} A/f_xA$. To slike lokale ligninger f_x og f'_x generer selvsagt samme hovedideal, og derfor tilfredstiller de en relasjon på formen $f_x = cf'_x$ der $c \in A^*$. Utifra dette er det lett å sjekke at (U_x, f_x) er lokale definerende data for en divisor, som vi også betegner med D. På snittet $U_{xy} = U_x \cap U_y$ gelder det nemlig at $f_x|_{U_{xy}} = c_{xy}f_y|_{U_{xy}}$ for en seksjon av $\mathcal{O}^*_{U_{xy}}$ siden idealet til $D \cap U_{xy} = (D \cap U_x) \cap U_y = (D \cap U_y) \cap U_x$ er generert både av $f_x|_{U_{xy}}$ og $f_y|_{U_{xy}}$. Dermed har vi bevist følgende setning:

Setning 1.5 *Anta at X er som , i.e., et noetehrsk, separert skjema uten embeddede komponenter. Da er det en én-én-tydig korrespondanse mellom lukkede underskjemaer $D \subseteq X$ som lokalt er gitt ved en ligning som ikke er en nulldivsor, og effektive Cartier-divisorer på X.*

At ligninger ikke er null-divisorer, betyr bare at de ikke forsvinner langs helr komponenter av X, og det betyr fysiske" komponenter siden vi har antatt at X er uten embeddede komponenter, og vi minner om at en funksjon forsvinner langs en komponent er ensbetydende med at restriksjonen dens til komponenten er nilpotent.

Dersom X er irredusibel og redusert, skjer dette aldri med mindre $D = X$, mens y-koordinaten til både den dobbelte x-aksen $\operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2)$ i $\mathbb{A}^2_k$ og til aksekorset $\operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)$ er et enkelt eksempler på en funksjon som ikke definerer en divisor. I det første tilfelle er den nilpotent og forsvinnere langs hele X, mens i det andre forsvinner den langs x-aksen.

(1.24) Inklusjonsvbildningen av idealet $\mathcal{O}_X(-D)$ i $\mathcal{O}_X$ kan dualiseres; *i.e.*, vi anvender funktoren $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{O}_X)$ på den, og da kommer vi frem til en avbildning $\alpha\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D)$. En slik avbildning er entydig bestemt av verdien den tar i 1, altså av den globale seksjonen $\sigma = \alpha(1) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$.

(1.25) Omvendt gir enhver global seksjon $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ opphav til en avbildning $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D)$, som dualisert gir oss en avbildning $\mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X$. Men det er ikke dermed sagt at den gir opphav til en divisor på X. Vi har nemlig et krav om ikke å være nulldivisor, og seksjonen σ kan jo forsvinne identisk når vi restrikterer den til en av komponentene til X.

Et enkelt eksempel på dette fenomenet er aksekorset $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)$, og vi kan til og med se på det trivielle invertible knippet $\mathcal{O}_X$. Både x og y er seksjoner av $\mathcal{O}_X$ hvis restriksjon til henholdsvis y-aksen og x-aksen forsvinner identisk. Og vil man ha et mere fancy eksempel med nilpotenter, kan man se på $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2y^2)$.

Er derimot X irredusibel og redusert, er det automatikk i at σ definerer en divisor, med mindre σ forsvinner identisk på X.

Siden de eneste globale endomorfiene til $\mathcal{O}_X$ er multiplikasjon med global seksjoner, vil to avbildninger $\mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X$ ha samme bilde hvis og bare hvis de er like på multilikasjon med en enhet nær. Vi har dermed etablert følgende resultat:

Setning 1.6 *Anta at X er som vanlig (et noethersk, separert skjema uten embeddede komponeneter). En divisor D er effektiv hvis og bare hvis $\mathcal{O}_X(D)$ har en global seksjon som ikke forsvinner identisk langs noen komponent av X. Til enhver slik globale seksjon σ svarer en effektiv divior som vi betegner med $V(\sigma)$. To globale seksjoner σ og σ' gir samme divisor hvis og bare hvis $\sigma = c\sigma'$ der c er en global enhet på X, i.e., $c \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$.*

(1.26) Krulls hovedidealsats forteller oss at underskjemaet D er av kodimensjon én i X, noe som betyr at høyden til de minimale primidealene er én; satsen forteller oss ikke om eventuelle embeddede komponenter. Slike vil lett forekomme i D dersom D går gjennom punkter som ligger på flere komponenter av X med forskjellig dimensjon.

OPPGAVE 1.5. La $X = \operatorname{Spec} k[x,y,z]/(zx, zy)$ og la $f = z - xy$. Bestem komponentene til X og observer at X er uten embedde komponenter. La $D = V(f)$ og vis at $D = \operatorname{Spec} k[x, y]/(x^2y, xy^2)$. Vis at D har en embedded komponent i $(0, 0)$. HINT: $(x^2y, xy^2) = (xy) \cap (x, y)^3$. ✷

OPPGAVE 1.6. Anta at A er en lokal, noethersk ring med maksimalt ideal $\mathfrak{m}$. Vis at $\dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ er det minimale antall generatorer for maksimalidealet $\mathfrak{m}$. HINT: Nakayamas lemma. ✷

OPPGAVE 1.7. La $A = k[x, y]/(xy)$. Da kan $\operatorname{Spec} A$ tjene som en god illustrasjon av et dobbeltpunkt. Vis at idealet (x, y) ikke kan genereres av ett element. Konkluder med at underskjemaet $\{(0, 0)\} = V(x, y) \subseteq \operatorname{Spec} A$ ikke er en Cartier-divisor. HINT: Se på forrge oppgave. ✷

(1.27) Det er ofte nyttig å kunne skrive en Cartier-divisor som en differens av to *effektive divisorer*. Man kan ikke håpe på dette generelt (selv ikke for hoveddivsorer), men en god hjelp er å kunne finne en slik differens som er lineært ekvivalent til den gitte divisor. Det er ikke alltid mulig, men for den store og viktige klassen av *kvasiprojektive* skjemeaer gjelder det. Mer presist, anta at det finnes en en invertibel $\mathcal{O}_X$-modul L slik at for alle koherente $\mathcal{O}_X$-moduler F så vil $L^r \otimes F$ være generert av sine globale seksjoner for en tilstrekkelig stor r. Da sies L å være *ampel*. For varieteter, kan man vise at X er en kvasiprojektiv varietet (altså isomorf med et lokalt lukket underskjema av et projektivt rom) hvis og bare hvis det finnes en ampel L på X. Et tilsvarende resultat finnes for skjemaer, men både hypotesene og definisjonen av kvasiprojektivitet er noe mer involverte.

Om M er nå er en annen invertibel $\mathcal{O}_X$-modul, kan vi velge r så stor at begge knippene $L^r \otimes M$ og L^r har seksjoner. Om $L^r = \mathcal{O}_X(E)$ og $L^r \otimes M = \mathcal{O}_X(C)$ og $M = \mathcal{O}_X(D)$ så er $D \equiv C - D$.

(1.28) Det enkleste dobbeltpunktet $P = (0, 0)$ på kurven $y^2 = x^2(x - 1)$ er et illustrerende eksempel. La $t = y/x$. Da er t er rasjonal funksjon som har både pol og nullpunkt i P! (pol siden $x = 0$ i P og nullpunkt siden $y = 0$ der) og utenfor P er f invertibel. Dersom $(t) = D_+ - D_-$

Derimot er $t^2 = y^2/x^2 = x - 1$ en regulær funksjon, og $D = (t^2)$ er effektiv med støtte i $(1, 0)$.

(1.29) PROJEKTIVE ROM Vi skal se nærmere på det projektive rommert $\mathbb{P}^n_k$ over en kropp k og velger homogene koordinater $x_\bullet = (x_0; \ldots; x_n)$. La U_i betegne den åpne undermengden av $\mathbb{P}^r_k$ der den i-te homogene koordinaten ikke forsvinner, *i.e.*, $U_i = \{\, x_\bullet \mid x_i \neq 0 \,\}$.

La $F(x_0, \ldots, x_n)$ være et ikketrivielt homogent polynom av grad d. Da er $(U_i, F(x_\bullet/x_i))$ lokale data for en divisor på $\mathbb{P}^n_k$ siden $F(x_\bullet/x_i)$ er en regulær funksjon på U_i som ikke forsvinner identisk. Vi har nemlig relasjonen

$$F(x_\bullet/x_i) = x_j^n/x_i^n F(x_\bullet/x_j),$$

og på snittet $U_{ij} = U_i \cap U_j$ er x_j/x_i en regulær og invertibel funksjon. Det tilordnede invertibel knippet betegner vi med $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(d)$ To homogene polynomer F og F' av samme grad gir opphav til lineært ekvivalente divisorer fordi $F(x_\bullet)/F'(x_\bullet)$ er en global, rasjonal funksjon på $\mathbb{P}^n_k$. Spesielt gjelder dette funksjonene F og x_0^d, og det følger at $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)^{\otimes n}$.

Et blik med lupe på dualisering

Det kan være greit å se nøyere på hva dualisering av avbildningen $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D)$ gjør lokalt: Over en åpne U som trivialiserer $\mathcal{O}_X(D)$, er den gitt som multiplikasjon med en seksjon i $\mathcal{O}_X$ over U, noe diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_U \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{O}_X(D)|_U \arrow[d, "\psi", "\wr"'] \\ & \mathcal{O}_U \end{tikzcd}$$

der ψ er den trivialiserende isomorfien $\psi\colon \mathcal{O}_U \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_X(D)|_U$, og der α er gitt som multiplikasjon med en $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Det tilsvarende diagrammet for avbildningen $\mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X$ ser slik ut (det er en god øvelse å overbevise seg selv om at dette holder stikk)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(-D)|_U \arrow[r] \arrow[d, "\psi'", "\wr"'] & \mathcal{O}_U \\ \mathcal{O}_U, \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

og lar vi ψ' være den duale til ψ faller α og α' sammen, og begge manifisterer seg som multiplikasjon med samme funksjon.

For at seksjonen σ i $\gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ skal indusere en divisor, må denne funksjonen være en ikke-nulldivisor i $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, og dét må holder for *alle* trivialiserende omegner U.

Funktorialitet

Invertible knipper har en rimelig grad av funktotialitet iallfall av kontevariant karakter. Det betyr at om $f\colon Y \to X$ er en morfi og L er et inveribelt knippe på X, så er tilbaketrekningen ϕ^*L invertibelt på Y. Dette stikker ikke dypere enn at $\{\phi^{-1}U_i\}$ er en trivialiserende overdekning for ϕ^*L hver gang $\{U_i\}$ er en for L. Det heller ikke dypt at $\phi^*L \otimes M \simeq \phi^*L \otimes \phi^*M$ slik at $\phi^*\colon \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$ er en gruppehomomorfi.

(1.30) For divisorer er imidlertid situasjonen mer subtil enn for invertible knipper. Selv om X og Y er irredusible og reduserte er det ikke nødvendigvism mulig å trekke tilbake en divisor på X langs en avbildning $\phi\colon Y \to X$. Problemene oppstår allerede om man vil sette ϕ sammen med en rasjonal funksjon f på X. Det kan skje at bildet $\phi(Y)$ er innehold i nullpunktsmengden[2] til nevneren i f, og da er det fånyttes å prøve å gi $f \circ \phi$

[2] Tolker man en rasjonal funksjon som en avbildning inn i den projektive linjen $\mathbb{P}^1$, kunne man tenke seg å sende punkter der nevnerene forsvinner til punktet ∞ i det undelig fjerne å således få en globalt definert funksjon, men dersom telleren også forsvinner, gir ikke dette mening, og man er like ille ute.

en mening. Er derimot bildet $\phi(Y)$ tett i X, eller med et annet ord er f dominerenede, vil dette fenomenet aldri kunne inntreffe. Sagt annerledes, generelt er det ingen grunn til at tilbaketrekningen av en ikke-nulldivior er en ikke-nulldivisor.

Generelt må vi ha at hver komponent i Y dominerer en komponent i X. Da vil nulldivisorer aldri trekkes tilbake til nulldivisorer, med den følge at vi har en god tilbaketrekning av divisorer.

(1.31) La oss starte med å se nærmere på en affin situasjon der $X = \operatorname{Spec} A$ og $Y = \operatorname{Spec} B$ og vi har gitt ringavbildning $\phi\colon A \to B$. Anta at hvert assosierte primideal $\mathfrak{q}$ i B trekkes tilbake til et assosiert primideal $\mathfrak{p}$ i A. Da avbildes ikke-nulldivisorer på ikke-nulldivisor — for om $a \notin \mathfrak{p}$ for alle $\mathfrak{p}$, så er $a \notin \phi^{-1}\mathfrak{q}$ for alle $\mathfrak{q}$ — og vi får indusert en avbildning $K(A) \to K(B)$.

(1.32) I en globale situasjon $f\colon Y \to X$ er den relevante betingelsen at assosierte punkter til Y avbildes på assosierte punkter til X. I vår situasjon der det ikke forekommer embeddede komponenter, betyr dette at hver komponent i Y dominerer en komponent i X. Under denne betingelsen har vi en tilbaketrekningsavbildning mellom knippene av rasjonale funksjoner:

$$f^*\colon \mathcal{K}_X \to f_*\mathcal{K}_Y$$

Da f^* tar $\mathcal{O}_X$ av $\mathcal{K}_X$ til $f_*\mathcal{O}_Y$, får vi indusert en avbildning

$$f^*\colon \mathcal{K}_X\mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{K}_Y/\mathcal{O}_Y)$$

og ved å ta globalseksjoner en gruppehomomorfi

$$f^*\colon \operatorname{Div} X \to \operatorname{Div} Y.$$

(1.33) Dersom (U_i, f_i) er lokale data for D, vil $(f^{-1}U_i, f_i \circ f)$ være lokale data for f^*D.

Recap: Moduler av endelig lengde

(1.34) En *simpel* eller *enkel* modul over en ring A er en modul som ikke inneholder ikke-trivielle, ekte undermoduler. Sagt annerledes, om $N \subseteq M$ er en undermodul, så er enten $N = 0$ eller $N = M$. Et godt eksempel kan være restklassekroppen $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ til en ring A i et maksimalt ideal $\mathfrak{m}$—faktisk er alle simple ikke-trivielle A-moduler på denne formen. For det første er de nemlig *monogene*, generert av et vilkårlig element forskjellig fra null: Om $a \in M$, vil undermodulen a genererer enten være null eller hele M. Således er M på formen $A/\operatorname{Ann}(a)$, og fordi $a \neq 0$, finnes det et maksimalt ideal $\mathfrak{m}$ som inneholder $\operatorname{Ann}(a)$. Da vil $\mathfrak{m}/\operatorname{Ann}(a)$ være en ekte undermodul av M, og siden M er simpel, følger det at $\operatorname{Ann}(a) = \mathfrak{m}$, og altså at $M \simeq A/\mathfrak{m}$.

(1.35) En *komposisjonskjede* i en A-modul M er en nedstigende kjede

$$0 = M_n \subseteq M_{n-1} \subseteq M_{n-2} \subseteq \ldots \subseteq M_0 = M$$

av undermoduler slik at hver av kvotientene M_i/M_{i+1} er en simpel A-modul; disse kvorientene kalles forøvrig for kjedens *subkvotienter*. Det naturlige tallet n omtaler vi som antall ledd i kjeden. Vi sier at M er av *endelig lengde* (og føyer til over A om det er nødvendig for å unngå misforståelser; ringen A spiller jo en avgjørende rolle i om M er av endelig lengde eller ikke) dersom M har en komposisjonskjede. Vi sier at komposisjonskjeden er *streng* dersom M_{i+1} er en *ekte* undermodul av M_i for hver i, eller ekvivalent, at M_i/M_{i+1} er en ikke-triviell simpel modul. I en streng komposisjonskjede er alle undermodulene som inngår forskjellige, mens i en (ukvalifisert) komposisjonskjede kan det opptre repetisjoner.

Det minste antallet ledd noen komposisjonskjede i M kan ha, kaller vi *lengden* til M, og vi skriver $\operatorname{length}_A M$. Dersom M ikke har noen endelig komposisjonskjede, lar vi $\operatorname{length}_A M = \infty$. Lengden til M realiseres av en streng komposisjonskjede, og for en hver annen komposisjonskjede er antall ledd minst lik $\operatorname{length}_A M$.

Det viser seg (det er ikke veldig vanskelig å vise, og resultatet kalles Jordan-Hölders teorem) at to strenge komposisjonskjeder har like mange ledd, og antall ledd er selvsagt lik lengden til M. I tillegg er subkvotientene i de to kjedene isomorfe, eventuelt etter en permutasjon. Dét antallet kaller vi *lengden* til M og skriver $\operatorname{length}_A M$.

(1.36) Dersom $A = k$ er en kropp, er jo en A-modul det samme som et vektorrom over k, og modulene av endelig lengde er presis vektorrommene av endelig dimensjon. Vi har selvsagt at $\operatorname{length}_k M = \dim_k M$.

(1.37) En grunnleggende egenskap ved lengden til en modul, er at den er en additiv funksjon over kort-eksakte følger.

Lemma 1.4 *Anta at*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

er en eksakt følge av A-moduler. Da har vi at

$$\operatorname{length}_A M = \operatorname{length}_A M' + \operatorname{length}_A M''$$

Bemerk at i lemmaet ligger det at M er av endelig lengde hvis og bare hvis både M' og M'' er det; den ene siden av likheten er jo endelig hvis og bare hvis den andre er det.

BEVIS: Anta $\{M'_i\}_{0\le i\le n'}$ er en streng komposisjonskjede for M' og at $\{M''_j\}_{0\le j\le n''}$ er en for M''. Trekker vi kjeden $\{M''_j\}$ tilbake til M ved hjelp av β, finner vi kjeden:

$$M' = \beta^{-1}(0) = \beta^{-1}M_{n''} \subseteq \beta^{-1}M_{n''-1} \subseteq \ldots \subseteq \beta^{-1}M''_0 = M,$$

som har de samme subkvotientene som kjeden $\{M''_j\}$, og derfor er en streng komposisjonskjede. Vi kan utvide den til å forstette nedover ved å bruke komposisjonskjeden $\{M'_i\}$ i M', og den sammenspleisete kjeden vil være en streng komposisjonskjede med $n' + n''$ ledd. Dette viser at dersom M' og M'' begge er av endelig lengde, så gjelder det samme for M, og vi har likheten $\operatorname{length}_A M = \operatorname{length}_A M' + \operatorname{length}_A M''$.

Den gjenværende påstanden—at om M ikke er av endelig lengde, så gjelder det samme for minst en av modulene M' og M''—overlater vi til den flittige student. ❑

(1.38) En svært anvendelig teknikk for å etablere resultater om moduler av endelig lengde er induksjon med hensyn på lengden. Vi skal illustrere dette gjennom å bevise to enkle, men nyttig utsagn.

Setning 1.7 *Dersom M er av endelig lengde, hvis og bare hvis M er endelig generert og støtten* $\operatorname{Supp} M$ *til M består av endelig mange maksimale idealer.*

Som sagt, beviset går ved induksjon på lengden, og vi starter med å sjekke satsen for moduler av lengde en, det vil si simple moduler. En simpel modul er monogen, generert av ethvert element som er forskjellig fra null, og er derfor lik restklassekroppen $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ for et entydig bestemt maksimalt ideal $\mathfrak{m}$ i A; det gjeldere nemlig at $M = A/\operatorname{Ann}(M)$, og var ikke $\operatorname{Ann}(M)$ maksimalt, ville vi kunne finne et maksimalt ideal $\mathfrak{m}$ som inneholder $\operatorname{Ann}(M)$, men som er forskjellig fra $\operatorname{Ann}(M)$, og dermed ville $\mathfrak{m}/\operatorname{Ann}(M)$ være en ekte ikke-triviell undermodul av M.

Så til induksjonssteppet som bruker at M inneholder en ikke-striviell simpel undermodul, som etter hva vi så, er på formen $k(\mathfrak{m})$. Vi har da den eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow k(\mathfrak{m}) \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

der N er av lengde en mindre enn M, og ved induksjon består $\operatorname{Supp} N$ av endelig mange maksimale idealer. Dessuten er det klart (siden lokalisering er en eksakt funktor) at $\operatorname{Supp} M \subseteq \operatorname{Supp} N \cup \{\mathfrak{m}\}$ og det følger at $\operatorname{Supp} M$ består av endelig mange maksimale idealer.

(1.39) En annen viktig egenskap som lengden har er følgend, og den vises likeledes derikte ved induksjon på lengden:

LengdeSumOverStøtte

Setning 1.8 *Anta at M er en A-modul av endelig lengde. Da er*

$$\operatorname{length}_A M = \sum_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M} \operatorname{length}_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$$

Bevis: Begge sider er additive funksjoner over kort-eksakte sekvenser og stemmer over ens for simple module; de er jo alle på formen $A/\mathfrak{m}$. ❏

(1.40) En noe mer subtile formulering, enn i 1.8 ovenfor finnes, og er verdt å ta med seg. For enhver A modul M og ethvert primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ har vi en kanoniske lokaliseringsavbildning $M \to M_\mathfrak{p}$. Dersom støtten til M er endelig og består av de maksimale idealene $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$, får vi en avbildning $M \to \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M} M_\mathfrak{m}$ ved å bruke disse lokaliseringsavbildningene som komponenter. En grunnleggende egenskap ved moduler av endelig lengde er at denne avbildningen er en isomorfi:

Lemma 1.5 *La M være en modul av endelig lengde over ringen A. Da da er den kanoniske avbildningen en isomorfi*

$$M \simeq \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M} M_\mathfrak{m}.$$

BEVIS: Avbildningen i utsagnet har som sagt komponenter de kanoniske lokaliserings-avbildningene. Den er injektiv, for om $a \in M$ er forskjellig fra null, så er $\operatorname{Ann}(a) \subseteq \mathfrak{m}$ for minst et ideal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M$, og følgelig sendes ikke a på null i $M_\mathfrak{m}$. Oppgaven våre altså å vise at avbildningen er surjektiv. Dette er klart opplagt riktig dersom M er en simple modul så vi kan anta at $k(\mathfrak{n}) \subseteq M$ er en ekte undermodul. Vi har diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k(\mathfrak{n}) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & k(\mathfrak{n}) \arrow[r] & \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} M} M_\mathfrak{m} \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

der den vertikale avbildningen i midten er avbildningen som oppterer i lemmaet, og de andre to er indusert av denne. Kvotienten N er av lengde en mindre enn M, så ved induksjon, gjelder påstanden for denne.

Dersom $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ er et ideal i $\operatorname{Supp} M$ så har vi at $M_\mathfrak{m} = N_\mathfrak{m}$ (lokalisering er eksakt og $k(\mathfrak{n})_\mathfrak{m} = 0$). Den simple modulen $k(\mathfrak{n})$ ligger inne i $M_\mathfrak{n}$ og, igjen siden lokalisering er eksakt, har vi at $N_\mathfrak{n} \simeq M_\mathfrak{n}/k(\mathfrak{n})$. Det følger at $E \simeq \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Supp} N} N_\mathfrak{m}$, og ved induksjon er γ en isomrfi. Fem-lemma gir da at α er en isomorfi. ❏

(1.41)

Setning 1.9 *Anta at A er av endelig type over en kropp k og la M være en A-modul av endelig lengde. Da er M av endelig dimensjon over k og vi har*

$$\dim_k M = \sum_x [k(x) : k] \operatorname{length}_x M_x. \tag{1.7}$$

AdditiviteDim

BEVIS: Beviset har to poenger. For det første at begge sider er additive funksjoner over korteksakte følger, og for det andre at likheten holder for alle enkle A-moduler M, altså de på formen $k(x) = A/\mathfrak{m}_x$ med $\mathfrak{m}_x$ et maksimalt ideal i A. Setningen følger da ved induksjon på lengden til M.

Venstre siden er opplagt additiv. For høyresidens del, gir vi oss en korteksakt følge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

av A-moduler av endelig lengde. La $x \in \operatorname{Spec} A$ tilsvare et maksimalt ideal $\mathfrak{m}_x$ som vi lokaliserer sekvensen i. Det gir den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow M'_\mathfrak{m} \longrightarrow M_\mathfrak{m} \longrightarrow M''_\mathfrak{m} \longrightarrow 0\ ,$$

og herav slutter vi at

$$[k(x) : k] \operatorname{length}_x M_x = [k(x) : k] \operatorname{length}_x M'_x + [k(x) : k] \operatorname{length}_x M'_x.$$

Summerer vi disse likhetene over alle lukkede punkter $x \operatorname{Spec} A$, ser vi at høyre side i (1.7) også er additiv.

Dersom $M = k(x)$ er enkel, så er $\operatorname{length}_x M = 1$, og den høyre siden redusere seg til $[k(x) : k]$, som jo ikke er noe annet enn $\dim_k k(x)$. ❏

(1.42) Anta nå at B er en endelig A algebra, og la $X = \operatorname{Spec} A$ og $Y \operatorname{Spec} B$. Da har vi en avbildning $\phi\colon Y \to X$, som er n endelig avbildning. La $x \in X$ være et lukket pukt tilsvarende maksimalidealet $\mathfrak{m}_x$.

Lokaliseringene $B_{\mathfrak{m}_x}$ er en semilokal ring

Fiberen $\phi^{-1}x$ betsår av endelig mange lukede punkter $y_1, \ldots, y_s$. Lokaliseringene $B_{\mathfrak{m}_x}$ er en semilokal ring hvis maksimalidealer er idealene $\mathfrak{m}_y$ til svarende punktene y i fiberen $\phi_1 x$, og for y indusrere $\phi^\sharp$ en kroppsutvidelse $k(x) \subseteq k(y)$.

Disse kroppsutvidelsene er endelige; for om $b_1, \ldots, bs_s$ generer B over A, genererer restklassene deres selvsagt $B/\mathfrak{m}_y$ over A, og derfor over $k(x)$. Vi disponerer således over heltallene $[k(\mathfrak{m}_y) : k(\mathfrak{m}_x)]$, som kan tolkes som *multiplisiteten* til punktet y i fiberen $\phi^{-1}x$ over x.

Setning 1.10 *Anta at M er en B-modul av endelig lengde. Da er M av endelig lengde over A og vi har*

$$\operatorname{length}_x M = \sum_{y \in \phi^{-1}x} [k(y) : k(x)] \operatorname{length}_y M.$$

Graden til en divisor

I dette avsnittet arbeider vi spesifikt med kurver. Selvom vi fra tid til annen behandler generelle resultater, som vi natutlig nok formuerer generelt, er det kurver som står i sentrum for vår oppmerksomhet.

Hensikten med avsnittet er å innføre graden til en Cartier-divisor. Det er et helt tall man kan tilordne divisoren, og de har sin historiske og begrepsmessige opprinnelse i graden til et polynom som vi kjenner så godt. Men selv med denne beskjedne herkomst, er det en konsevensrik og grunnleggende konstruksjon, ikke uten dybde.

Som en oppvarming, la oss se på en analystisk funksjon på en Riemann-falte S, og Om f er en rasjonale funksjon på en Riemannflate X — for eksempel kan X være Riemann-kulen, *i.e.*, $X = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ — og $x \in X$ er et punkt, så har f en *orden* i x, som man også kunne kalle en *lokal grad*. Hvis z er en analytisk koordinat rundt x, så kan man i en åpen omegn om x skrive $f(z) = z^n g(z)$ der $g(z)$ er en analytisk funksjon i omegnen og som ikke forsvinner der. Der ikke vanskelig å sjekke at helallet n er uavhengig av hvilken lokale koordinat vi velger å bruke, og vi skriver $n = \operatorname{ord}_x f$.

Om $f(z)$ er et polynom, forteller algebraens fundamentalsetning oss at den formelle graden til f som polynom — altså den vanlige graden, eksponenten til leddet av høyest grad — faller sammen med summen av alle de lokale gradene til f; denne summen er jo ikke annet enn antall nullpunkter talt med multiplisitet.

Det er bare divisorer på kurver som man kan tilordne en grad. Gjennom hele avsnittet, med et par eksplisitt uttalte unntak, skal således X betegne en kurve, og med det mener vi et noethersk og separert skjema som ekvidimensjonalt av dimensjon én. Det innebærer at X har endelig mange irredusible komponenter som alle er av dimensjon én, og ingen embedded komponent forekommer i X.

Gjennom avsnittet skal A betegne en noethersk ring som er ekvidimensjonal av dimensjon én. Hvis $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ betegner de minimale primidealene så er $\dim A/\mathfrak{p}_i = 1$ for hver i.

Skjemaet $X = \operatorname{Spec} A$ er da blant dem beskrvet ovenfor, og tilsvarende, en hver åpen affin it et skjema som tilfredstiller kravene ovenfor har en koordinat ring av denne typen.

(1.43) Anta at $f \in A$ er en ikke-nulldivisor. Siden A er av noethersk og av dimensjon én er kvotienten A/fA noethersk og null-dimensjonal, og den er således en modul av endelig lengde over A. Vi definerer $\operatorname{ord}_A f = \operatorname{length}_A A/fA$.

Lemma 1.6 *Anta at f og g er to ikke-nulldivisorer fra A. Da har vi at*

- $\operatorname{ord}_A(fg) = \operatorname{ord}_A f + \operatorname{ord}_A g$,
- $\operatorname{ord}_A f = 0$ *hvis og bare hvis f er en enhet i A.*
- $\operatorname{ord}_{A_\mathfrak{p}} f \neq 0$ *kun for endelig mange primidealer $\mathfrak{p}$.*
- *Følgende formel gjelder* $\operatorname{ord}_A f = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{ord}_{A_\mathfrak{p}} f$.

BEVIS: Da lengden er additiv over eksakte følger, følger det første utsagnet i lemmaet umiddelbart fra følgende eksakte følge:

$$0 \longrightarrow A/fA \xrightarrow{\alpha} A/fgA \longrightarrow A/gA \longrightarrow 0,$$

der avbildningen α er gitt som multiplikasjon med g, det vil si ved $\alpha[a] = [ga]$. Følgen er klart eksakt: Bildet til α er lik gA/fgA, og om $[a]$ ligger i kjernen til α, så er $ga = fgb$ for en $b \in A$, men siden g er en ikke-nulldivisor, følger det da at $a = fb$, og altså $[a] = 0$.

Den andre påstanden er riktig fordi likheten $A/fA = 0$ både er ekvivalent med at f er en enhet og at lengden til A/fA er null.

Så til de to siste påstandene: Elementet f er ikke en nulldivisor, ligger følgelig ikke i noen av de minimale primidealene $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ til A. Sidene et primideal i A enten er minimalt eller maksimalt, betyr det at primidealene som opptrer i primærdekomposisjonen av idealet $(f)A$, alle er makismale, og derfor er de de eneste primidealene som inneholder f. Det er endelig mange slike, la oss si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$. Da er $\operatorname{Supp} A/fA = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s\}$, og fra korollar **??** ovenfor slutter vi at

$$\operatorname{length}_A f = \sum_i \operatorname{length}_{A_{\mathfrak{m}_i}} f = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{length}_{A_\mathfrak{p}} f.$$

❑

(1.44) Elementene i den totale kvotientringen $K(A)$ kan alle skrives som en kvotient f/g der g ikke er en nulldivisor. For elementene i $K(A)^*$ gjelder det i tillegg at f heller ikke er en nulldivisor. *Ordenen* til et slikt element f/g kan da defineres som $\mathrm{ord}_A fg^{-1} = \mathrm{ord}_A f - \mathrm{ord}_A g$; dette er en gyldig definisjon siden dersom $fg^{-1} = eh^{-1}$, vil $fh = eg$, og vi har at $\mathrm{ord}_A f + \mathrm{ord}_A h = \mathrm{ord}_A e + \mathrm{ord}_A g$. Det er da klart at de to representasjonene gir samme orden. Oppsummert har vi følgnde setning:

Setning 1.11 *Dersom A er noethersk og ekvidimensjonal av dimensjon én, har vi en gruppehomomorfi $\mathrm{ord}_A \colon K(A)^* \to \mathbb{Z}$. Kjernen inneholder gruppen A^*, men likhet gjelder ikke generelt. Om $a \in A$, så er $\mathrm{ord}_A a = \mathrm{length}_A\, A/aA$.*

(1.45) I setningen har vi likehet mellom kjernen til ord_A og A^* dersom A er en valuasjonsring (setning 1.12 nedenfor). For å finne et eksempel på en ring A der likhet ikke gjelder, trenger man ikke lete lenger enn til en av de enklest tilgjengelige singulariteter: Et enkelt dobbeltpunkt på en plan tredjegradskurve; *e.g.*, vi ser på kurven X i $\mathbb{A}^2_k$ gitt ved ligningen $y^2 = x^2(x+1)$. Vi skal se på den rasjonale funksjonen $t = y/x$ og skal finne at den er av orden null men den ligger ikke i A og derfor heller ikke i A^* naturligvis. Funksjonen t fungerer som en parameter for X i den forstsnd at tilordningen $x = t^2 - 1$ og $y = t(t^2-1)$ gir oss en inklusjon $A = k[x,y]/(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq k[t] = B$ og derfor en isomorfi

$$A = k[x,y]/(y^2 - x^2(x+1)) \simeq k[t^2 - 1, t(t^2-1)] \subseteq k[t] = B.$$

Det er klart at $B \neq A$ siden $t \notin A$ (For eventuelle tvilere: Dersom t kan uttrykkes som et polynom i $t(t^2-1)$ og $t^2 - t$, får man en motsigelse ved å sette inn $t = 1$ og $t = -1$). Anta at $\mathfrak{m} \subseteq A$ er et maksimalt ideal og $x \notin \mathfrak{m}$. Da er $A_\mathfrak{m} = B_\mathfrak{m}$. Videre er $\mathfrak{m}_0 = (x,y)$ det eneste maksimale idealet som inneholder x. Det følger at $A_{\mathfrak{m}_0} \neq B_{\mathfrak{m}_0}$, og derfor er $t \notin A_{\mathfrak{m}_0}$.

På den annen side er $\mathrm{ord}_A x = \mathrm{ord}_A y = 2$, siden vi opplagt har $A/xA = k[y]/y^2$ og $A/yA = k[x]/x^2$, slik at $\mathrm{ord}_A t = 0$.

(1.46) Anta nå D er en divisor på X og $x \in X$ er et lukket punkt. Vi velger lokale data (U, f) for D rundt x og definerer *den lokale ordenen til D* i punktet x til å være $\mathrm{ord}_x D = \mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f$. Det er selvsagt mange forskjellige lokale data som definerer D omkring x, men $\mathrm{ord}_x D$ er uavhengig av dette valget, for om (U', f') er et annet sett av lokale definerende data for D omkring x, kan vi skrive $f = cf'$ der c er en enhet i $\mathcal{O}_{X,x}$. Det følger at $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f = \mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} c + \mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f' = \mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f'$. *Ordenen* til D definerer vi ved å summere opp over alle punkter i X. Vi setter

$$\mathrm{ord}_X D = \sum_x \mathrm{ord}_x D,$$

der summen tas over alle lukkede punkter i x og der som vanlig kun et endelig antall ledd i summen er forskjellig fra null.

(1.47) DISKRETE VALUASJONSRINGER Tilfellet at A er en diskret valuasjonsring, fortjener særskilt oppmerksomhet. Betegn det maksimale idealet i A med $\mathfrak{m}$ og restklassekroppen $A/\mathfrak{m}$ med k, og la viere π betegne en uniformiserende parameter i A; *i.e.,* π er en generator for $\mathfrak{m}$. Poenget i denne paragrafen er at ordenen til et element i $K(A)^*$, slik vi nettopp definerte den, faller sammen med valuasjonen — iallfall om valusjonen v er normert (*i.e.,* $v(\pi) = 1$). Med andre ord, vi har at $\text{ord}_A f = v(f)$ for alle $f \in K(A)^*$. For å innse dette skriver vi $f = u\pi^v$ med u en enhet i A og $v = v(f)$. Det er klart idealene (f) og (π^v) faller sammen, og følgelig er $A/(f) = A/(\pi^v) = A/\mathfrak{m}^v$. Denne ringen har lengde v siden idealene $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^v$ danner en streng dekomposisjonskjede i $A/\mathfrak{m}^v$ (subkvotientene $\mathfrak{m}^{i-1}/\mathfrak{m}^i$ er alle isomorfe med k). Vi oppsummerer i følgende setning:

Setning 1.12 *Anta at A er en diskret valusjonsring hvis tilhørende normaliserte valuasjon er v. Desom $f \in K(A)^*$, så er $\text{ord}_A f = v(f)$.* OrdValua

(1.48) VARIETER OVER EN KROPP. I denne pragrafen ser vi nøyere på kurver som i tillegg å være underlagt de generelle krav i dette avsnitt—*i.e.,* noethersk, separerte, uten embeddede komponenter og alle irredusible komponentene er av dimensjon én—skal være av *over en* kropp k. Vi skal kort kalle et slikt skjema en *kurve* over k. Kroppen k er naturligvis ikke alltid algebraisk lukket, og den kan gjerne være av positiv karakteristikk.

Den viktigste egenskapen til X vi skal bruke, er at for alle lukkede punkter $x \in X$ med tilhørende maksimalt ideal $\mathfrak{m}_x$ i A, så er restklassekroppen $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ en endelig utvidelse av grunnkroppen k — dette er ikke annet enn Hilberts Nullstellensatz. Graden til $k(x)$, som er definert som $\dim_k k(x)$, betegnes tradisjonelt med $[k(x) : k]$.

For en kurve X over k kan vi definere *graden* til en divisor D ved

$$\deg_k D = \sum_{x \in X} [k(x) : k] \text{ord}_x D$$

der summen, som i virkeligheten er endelig sum, tas over alle lukkede punkter i X.

(1.49) Graden $\deg_k D$ avhenger av kroppen k, men ikke på en intrikat måte. Dersom $k' \subseteq k$ er en underkropp slik at k er endelig over k' er ogaså X en kurve over k', og vi har selvsagt at $[k(x) : k'] = [k(x) : k][k : k']$ siden graden er multiplikativ langs tårn av kroppsudvidelser. Det følger med en gang at $\deg k' D = \deg k D$.

(1.50) Grunnen til ekstrafaktoren $[k(x) : k]$ forklares best ved eksempler. La oss først se på $A = \mathbb{R}[x, y]/x^2 + y^2 + 1$. Det er klart at $A/(u) = \mathbb{R}[u, v]/(u, u^2 + v^2 + 1) = \mathbb{R}[v]/(v^2 + 1) = \mathbb{C}$, og vi ser at (u) er et maksimalt ideal. Nå er $\text{length}\, AA/(u) = 1$, mens $|k|x = 2$. Geometrisk tilsvarer lokuset $x = 0$ på $\text{Spec}\, A$ jo de to komplekse punktene $(0, i)$ og $(0, -i)$. De er konjugerte og i A slås de sammen til et maksimalt ideal; som man i en viss forstand kan tenke på som en reell manifestasjon av punktparet.

Nen denne "fusjonen" må reflekteres i graden om mange av de resultatene vi gjerne vil ha, skal holde, *e.g.,* Bezouts teorem.

OPPGAVE 1.8. La $X \subseteq \mathbb{A}^2_k$ være gitt ved ligningen $v^2 - u^{2p+1}$ og betegn koordinateringen til X med A. La $a, b \in K$ være to parametre som ikke forsvinner samtidig; *i.e.*, $ab \neq 0$, og la $f \in A$ være restriksjonen til $au + bv$ til X. Drøft $\operatorname{ord}_x f$ for forskjellige punkter x på X. ✷

OPPGAVE 1.9. La $X \subseteq \mathbb{A}^2_k$ være gitt ved ligningen $v^2 - u(u+1)^2$ bestem $\operatorname{ord}_x f$. der $x = (-1, 0)$ og $f = au + bv$ for forskjellige $a, b \in k$ med $ab \neq 0$. ✷

OPPGAVE 1.10. La $C \subseteq \mathbb{P}^2_k$ være gitt ved en Weierstrassligning

$$Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

der X, Y og Z er homogene koordianter i det projektive planet $\mathbb{P}^2_k$. La p være punktet $(0;1;0)$. Bestem $\operatorname{ord}_p X$ og $\operatorname{ord}_p Y$. ✷

(1.51) La nå D være en divisor på en kurve X, og anta at de lokal dataene $\{(U_i, f_i)\}$ representerer D. Ved eventuelt å gjøre U_i-ene minder (og flere) kan vi anta at de alle er affine, si $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ der A_i-ene er noetherske ringer som er ekvidimensjonale av dimensjon én.

Om $x \in X$ er er et lukket punkt, ligger x i U_i for minst en indeks i, og det tilsvarende maksimale idealet $\mathfrak{m}$ i A_i tilfredstiller $\mathcal{O}_{X,x} = A_\mathfrak{m}$. Vi definerer $\operatorname{ord}_x D = \operatorname{ord}_{A_\mathfrak{m}} f_i = \operatorname{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f_i$. Dersom x også ligger i en annen av de åpne mengdene fra overdekningen, la oss si U_j, så har vi relasjon $f_i = c_{ij} f_j$ på U_{ij} der c_{ij} er en enhet i $\Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X)$, og dette medfører at $\operatorname{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f_i = \operatorname{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} f_j$ siden enheter alle er av orden null.

Et lignende argument viser at ordenen $\operatorname{ord}_x D$, slik vi har definert den, er uavhengig av hvilke lokale data vi bruker til å representere D.

Vi definerer tilslutt *graden* til divisoren D ved å summere alle lokal bidragene i de lukkede prunktene gitt ved $\operatorname{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} D$, og bemerker at det kun er endelig mange slike som er forskjellig fra null. Vi lar

$$\deg D = \sum_{x \in X,\ \text{lukket punkt}} \operatorname{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}} D$$

(1.52) Anta $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ er et lukket underskjema — altså, hva vi kaler et projektivt skjema. Da vil X_i indusere en divisor, gitt ved de lokal dataene $(U_J, X_j/X_i)$. Hvis $n = 2$ og X er en kurve med ligning $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ vil X_0 være av grad d. Vi har nemlig at D er representert ved

Graden til en avbildning

La X og Y være to skjemaer, og anta at $\phi\colon Y \to X$ er en regulær avbildning. Man sier at ϕ *endelig* dersom de to kriterier er oppfylt

- ☐ ϕ er affin;*i.e.*, dersom $U \subseteq X$ er åpen og affin, så er $\phi^{-1}U \subseteq Y$ affin.
- ☐ Dersom $U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ og $V = \phi^{-1}U = \operatorname{Spec} B$, så er B en endelig A-algebra via $\phi^\sharp$.

Fremskyvning av $\phi_*\mathcal{O}_Y$ er et kvasikoherent knippe på X uansett hvilken regulære avbildning ϕ er, men for endelige avbildninger gir det andre kriteriet at $\phi_*\mathcal{O}_Y$ er en *koherent* $\mathcal{O}_X$-modul. Dette er et grunnleggende resultat i algebraisk geometri.

(1.53) Dersom $x \in X$ er et lukket punkt med definerende koherent ideal $I_x \subseteq \mathcal{O}_X$,så er *fiberen* til ϕ over x det lukkede underskjemaet definert av idealet $\phi^* I\mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{O}_Y$. I det affine tilfellet med $X = \operatorname{Spec} A$ og $Y = \operatorname{Spec} B$ er fiberen over x naturlig isomorf $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{m}_x B$ der $\mathfrak{m}_x$ er det makasimale idealet til punktet x. Om $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X,x} = A/\mathfrak{m}_x$ betegner restklassekroppen i x, så er $\phi^{-1}(x) \simeq \operatorname{Spec} B \otimes_A k(x)$.

Om x ikke nødvendigvis er lukket, lar vi $k(x) = K(A/\mathfrak{p}) = K(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_x\mathcal{O}_{X,x})$ der primidealet $\mathfrak{p}_x$ definerer x. Fiberen over x la vi da være $\phi^{-1}(x) = \operatorname{Spec} B \otimes_A k(x) = \operatorname{Spec} B \otimes_A K(A/\mathfrak{p}_x)$.

(1.54) Fibrene til en endelig avbildning ϕ er alle endelig, for om $x \in X$ så er $\phi^{-1}(x) = \operatorname{Spec} B \otimes_A k(x)$, og $B \otimes_A k(x)$ er en endelig algebra over kroppen $k(x)$. Den har derfor kun endelig mange primidealer (som alle er maksimale). Vi innfører notasjonen $\dim_{k(x)} \phi^{-1}(x) = \dim_{k(x)} B \otimes_A k(x)$, som ikke må forveksles med Krull-dimensjonen til $\phi^{-1}(x)$, den er selsvagt null for en endelig avbildning.

Det omvendte gjelder ikke. Det enkleste eksemplet er en åpen immersjon $U = \operatorname{Spec} A_f \subseteq X = \operatorname{Spec} A$. Unntatt i enkelte helt spesielle tilfeller, er lokaliseringen A_f ikke en endelig algebra over A; man trenger alle potenser f^{-n} for å generer A_f over A, men fibrene til immersjonen er endelige. De består av ett eller ingen punkter.

Det som er riktig er at om avbildning f er proper og har endelige fibre, så er f endelig. Spesielt vil avbildniger med endelige fibre mellom propre skjemaer være endelige.

OPPGAVE 1.11. Anta at $f \in A$ ikke er en nulldivisor. Vis at dersom A_f er endelig over A, så er $A_f = A$; *i.e.*, f er en enhet i A. Gi et eksempel på at A_f er endelig over A, men forskjellig fra A. ✱

(1.55) La $X = \operatorname{Spec} A$ være et irredusibelt og reduserte noethersk skjema, det vil si at at A er et noethersk integritetsområde.La videre $\phi\colon Y \to X$ være en endelig avbildnig. Da er også Y affin, la oss si at $Y = \operatorname{Spec} B$, der B er en endelig A-algebra. Den siste antagelsen vi legger på avbildningen ϕ, er at den skal være *dominerende*. Det betyr at bildet av hver komponent ligger tett i X. Siden A er et integritetsområde, er dette ensbetydende med at $A \subseteq B$, og at $\mathfrak{q} \cap A = 0$ for hvert assosierte primideal $\mathfrak{q} \subseteq B$, Det følger at vi kan utvide inklusjonen $A \subseteq B$ til en inklusjon $K(A) \subseteq K(B)$.

Det følgende lemmaet forteller oss blant annet at den totale kvotientringen $K(B)$ er et endelig vektorrom over kroppen $K(A)$. Vi lar $[K(B) : K(A)] = \dim_{K(A)} K(B)$, en konvensjon som er i samsvar med den tradisjonelle notasjonen når B også er et integritetsområde og $K(A) \subseteq K(B)$ er en kroppsutvidelse. Vi kaller $[K(B) : KA]$ for *graden til* ϕ.

ABLemma1

Lemma 1.7 *La A være et notehersk integritetsområde. Og la B være en endelig A-algebra slik at $A \subseteq B$. Anta at $\mathfrak{p} \cap A = 0$ for alle assosierte primidealer $\mathfrak{p}$ i B. Da gjelder $K(B) = K(A) \otimes_A B$, der $K(B)$ er den totale kvotientringen til B.*

BEVIS: Vi minner om at $K(A) \otimes_A B$ ikke er annet enn lokaliseringen av B i det multiplikative systemet $A \setminus \{0\}$, og elementene der er alle på formen ba^{-1} der $a \in A$ er forskjellig fra null. Siden ingen $a \in A$ forskjellig fra null er en nulldivisor i B, har vi at $K(A) \otimes_A B$ er inneholdt i $K(B)$.

La så $b \in B$ være et element som ikke er en nulldivisor. La M_r være A-undermodulen av B generert av potensene $1, b, \ldots, b^r$. De danner en oppstigende kjede av A-undermoduler og siden B er en noethersk A-modul, er denne kjeden stasjonær. Det betyr at $M_n = M_{n-1}$ for en passende n som er stor nok, og vi lar n være den minste. Vi kan således skrive

$$b^n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{n-1} b^{n-1}$$

der $a_0 \neq 0$ siden vi valgte n minimal og b ikke er en nulldivisor. Det viser at

$$b(b^{n-1} - a_1 - \cdots - a_{n-1} b^{n-1}) a_0^{-1} = 1,$$

og følgelig er $b^{-1} \in K(A) \otimes_A B$. ❑

Et godt eksempel på prinsippet om "antallenes permanens" er følgende setning, som forteller oss at antall punkter i en fiber er permanent iallefall for generiske fibre. Dessuten må antallet tolkes i vid forstand slik at eventuelle multiplisieteter regnes med; formelt betyr dette at målet på "antall punkter i fiberen" er $\dim_{k(x)} \phi^{-1}(x)$.

Setning 1.13 *Lat X og Y være to noetherske og separerte skjemaer og anta at X er irredusibel og redusert. La videre $\phi \colon Y \to X$ være en endelig og dominerende avbildning. Det finnes da en ikketom åpen umdermengde $U \subseteq X$ slik at $\dim_{k(x)} f^{-1}(x) = [K(Y) : K(X)]$ for alle $x \in U$.*

Lemma 1.8 *La $n = [K(B) : K(A)]$. Det finnes et element $f \in A$ slik at B_f er en fri A-modul av rang n.*

BEVIS: Siden B er endeliggenerert over A, er $K(A) \otimes_A B$ et endeligdimensjonalt vektorrom over $K(A)$ og etter lemma 1.7 ovenfor er denne dimesnjonen lik $[K(B) : K(A)]$. Da har vi en eksakt sekvens

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^n \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

der altså $n = [K(B); K[A]]$. Det følger at $K(A) \otimes_A C = K(A) \otimes_A K = 0$, og både C og K har således ikke.trivielle anihilatoridealer. Velg f som et felles element i disse idealene. ❑

(1.56) Anta nå at X er en irredusibel og regulær kurve. Da er alle dens lokale ringene $\mathcal{O}_{X,x}$ i lukkede punkter $x \in X$ diskret valuasjons ringer, og for alle åpne affine $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ er A et dedekindsk område.

Anta videre at f er en dominerende avbildning, i den forstand at hver av de irredusible komponenetene Y_i til Y dominerer X. Dersom $U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ og $f^{-1}U = \operatorname{Spec} B \subseteq Y$, så er dette ekvivalent med at ethvert minimalt primideal $\mathfrak{q}$ i B, tilfredstiller $\mathfrak{q} \cap A = 0$.

Lemma 1.9 *Da er B en lokalt fri modul over A.*

BEVIS: Et hvert element i A er en ikke-nulldivisor på B. Spesielt om π er uniformiserende i ❏

1.1 Riemann Roch

Lemma 1.10 *La X være en kurve — i.e., et noethersk, separert skjema av ren dimensjon en uten embeddede komponenter. Enhver Cartier divisor D på X kan skrive som differens av to effektive Cartier-divisorer.* DiffEff

BEVIS: La D være divisoren vi starter med, og la $(U_i, a_i b_i^{-1})$ være et sett av lokale definerende data for D, der a_i og b_i er ikke-nulldivisorer i $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. Siden X er noethersk, kan vi anta at det kun er endelig mange par $(U_i, a_i b_i^{-1})$ med i settet.

Hvert underskjema $V(b_i)$ av U_i består kun av endelig mange punkter siden X er av dimensjon én, og b_i ikke er en nulldivisor. Det betyr at $V(b_i)$ også er lukket i X, og vi kan definere en divisor D_i ved de lokale dataene $(X \setminus V(b_i, 1)$ og (U_i, b_i).

Vi lar $F = \sum_i D_i$. Da er $E = F + D$ også effektiv, siden den over den åpne mengden U_i er gitt ved $a_i b_i^{-1} \cdot b_i b$ der b er produktet av de andre b_j-er slik at U_j treffer U_i. Det følger at $D = E - F$ der altså både E og F er effektive. ❏

Dette lille lemma muliggjør beviset for Riemanns del av Riemann-Roch teoremet. Vi definerer *det aritmetiske genus* p_a til kurven X ved $1 - p_a = \chi\mathcal{O}_X$, *i.e.*, $p_a = 1 - \chi\mathcal{O}_X$. Dersom X tilfredstiller $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$, så er $p_a = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Vi har:

Teorem 1.1 *La X være en kurve som er proper over en kropp k. For hver Cartier-divisor $D \in \operatorname{div} D$ gjelder det da at*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = 1 - p_a + \deg_k D$$

BEVIS: Dersm D er en effektiv divisor, disponerer vi den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0\,. \tag{1.8}$$

Strukturknippet $\mathcal{O}_D$ er et skyskraperknippe med støtte langs det endelige underskje- FundExSekv maet D, hvorfra det følger at vi har en naturlig isomorfi $H^0(X,\mathcal{O}_X)\simeq\bigoplus_{x\in D}\mathcal{O}_{D,x}$. Fra xxx slutter vi at $\chi\mathcal{O}_D=\dim_k H^0(X,\mathcal{O}_D)=\deg_k D$.

Vi tensoriserer så sekvensen (1.8) ovenfor med $\mathcal{O}_X(D)$, og siden $\mathcal{O}_X D$ er lokalt isomorf med $\mathcal{O}_X$, blir resultatet en ny kort-eksakt følge:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_X(D)\longrightarrow\mathcal{O}_D\otimes\mathcal{O}_X(D)\longrightarrow 0.$$

Nå er $\mathcal{O}_D\otimes\mathcal{O}_X(D)\simeq\mathcal{O}_X(D)$ siden D har endelig støtte, og additivitet av Euler-karakteristikken gir oss da

$$\chi(\mathcal{O}_X(D))=\chi\mathcal{O}_X+\deg D.$$

Vi har dermed vist teoremet for effektive divisorer.

En generell Cartier-divisor D kan vi etter lemma 1.10 ovenfor skrive som en differens $D=E-F$ der E og F er effektive divisorer. Siden F er effektiv, har vi den korteksakte følgen

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(-F)\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_F\longrightarrow 0$$

av koherente $\mathcal{O}_X$-moduler. Den gir den eksakte følgen

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(E-F)\longrightarrow\mathcal{O}_X(E)\longrightarrow\mathcal{O}_F\otimes\mathcal{O}_X(E)\longrightarrow 0$$

når den tensoriseres med $\mathcal{O}_X(E)$, og vi har $\mathcal{O}_F\otimes\mathcal{O}_X(E)\simeq\mathcal{O}_F$ siden støtten F til $\mathcal{O}_F$ er endelig. Følgelig er $\chi(\mathcal{O}_F\otimes\mathcal{O}_X(E))=\chi(\mathcal{O}_F)=\deg F$. Vi finner

$$\chi\mathcal{O}_X(E)=\chi\mathcal{O}_X(D)+\deg_k F,$$

men siden E er effektiv, vet vi at $\chi\mathcal{O}_X(E)=\xi\mathcal{O}_X+\deg_k E$, som innsatt gir

$$\chi\mathcal{O}_X(D)=\chi\mathcal{O}_X+\deg_k E-\deg_k F=\chi\mathcal{O}_X+\deg D.$$

❏

(1.1) Der er verdt å se på noen enkle eksempler på hvordan det aritmetiske genuset kan oppføre seg, og vi starter med en kurve som er unionen av to andre kurver med endelig snitt. Anta at $X_i\subseteq X$ er to lukkede underskjemaer som begge er kurver og at $X=X_1\cup X_2$ skjemateoreisk. Om idealene til X_i er I_i betyr dette at $I_1\cap I_2=0$. Anta videre at $X_1\cap X_2$ er endelig. Det skjemateoretiske snittet $X_1\cap X_2$ er gitt ved idealet I_1+I_2, og vi antar at dette er endelig. La $s=\chi\mathcal{O}_{X_1\cap X_2}$. Da har vi sekvensen

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_{X_1}\oplus\mathcal{O}_{X_2}\longrightarrow\mathcal{O}_{X_1\cap X_2}\longrightarrow 0,$$

som gir

$$1-p_X=1-p_{X_1}+1-p_{X_2}-s$$

Vi finner $p_X=p_{X_1}+p_{X_2}+s-1$.

OPPGAVE 1.12. Vis at den disjunkte unionen av n copier av den projektive linjen $\mathbb{P}^1_k$ er av aritmetisk genus $1-n$. ✷

OPPGAVE 1.13. Finn snittet mellom $zy^2=x^2(x+z)$ og $zy^2=x^2(x+2z)$. ✷

(1.2) La $X \subseteq Y$ være en kurve på en glatt flate gitt ved idealet I som vi antar lokalt er et hoved ideal. Fordoblingen Z av X på Y er gitt ved kvadratet I^2 av I. Det er igjen generet av ett element lokalt, og vi har sekvensen

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Idealet I er et invertibel ideal, så la oss omdøpe det til L^{-1}. Da er $I/I^2 = I \otimes \mathcal{O}_X = L^{-1}|_X$, slik at vi har sekvensen

$$0 \longrightarrow L^{-1}|_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow /OOX \longrightarrow 0$$

Anta at $X \simeq \mathbb{P}^1_k$ og at $L|_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n)$. Vi finner

$$\chi\mathcal{O}_Z = \chi\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} + \chi\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-n) = 1 - (n-1) = 2 - n$$

så $p_Z = n - 1$

Serre-dualitet

I dette avsnittet skal vi gjengi beviset fra Serres bok "Groupes algêbriques et corps classe" for dualitetsteoremet for kurver.

I de første avsnittene ser han på kurver X som er regulære, irredusible og komplette over en algebraisk lukket kropp k. Vi skal følge ham i dette, selvom vi

dermed avviker ceentlig fra kursen vi has satt tisligere i disse notatene. Som en viss avbikt for denne synd formuletrer vi på tampen av avsnittet et vesentøig mer generelt dualitetsteorem, men uten bevis.

Det finnes et utrolig generelt dualitetsteorem først formulert og bevist av Grothendieck, senere utvidet og generalisert (!!) videre. En gjennomgang av den materien ville krevet et eget kurs, som er uaktuelt i vår sammengeng. Man kunne sett for seg en nedjustert i en versjon kun gyldig for kurver, men selv den ville oppta en uforholdsmessig stor del av kurset.

Veien vi følgert er altså et kompromiss, vi beviser noe, men ikke så mye vi burde.

Men nå lar vi altså X inn til videre være en regulær, irredusibel og komplett kurve over k og vi antar at k er algebraisk lukket.

Differensialer

Differensialer er velkjente objekter fra mange andre deler av matematikken som for eksempel flervariabelanalyse, mangfoldighetsteori og ikke minst differential geometri. I algebraisk geometri introduseres de rent formelt og algebraisk, og de kalles ofte for *Kähler-differentialer* etter den tyske matematiker Erich Kähler (1906–2000).

(1.3) Vi skal arbeide over en grunnring k, som i vår sammenheng som oftes vil være en kropp. La videre A være en k-algebra og M en A-modul. Med en *k-derivasjon* fra A til M forstår vi en k-lineær avbildning $d\colon A \to M$ som oppfyller den gode gamle produktregelen:

$$d(ab) = a\,d(b) + b\,d(a).$$

Gitt at produktsregelen holder, er det lett å se at d er k-lineær hvis og bare hvis d forsvinner på alle elementer av formen $a \cdot 1$ med $a \in k$. Man kan tenke på elementene i A på formen $a \cdot 1$ som "konstanter", men en derivasjon kan gjerne forsvinne på andre elementer i A også.

EKSEMPEL 1.1. Et enkelt eksempel er den klassiske derivasjonen fra polynomringen $A = k[x]$ til seg selv gitt ved $P(x) \mapsto P'(x)$. Som vanlig er $P'(x)$ definert formelt ved $P'(x) = \sum_i i a_i x^{i-1}$ dersom $P(x) = \sum_i a_i x^i$. Mer generelt, om $A = k[x_1, \ldots, x_r]$ vil være av de partiel deriverte $P(x_\bullet) \mapsto \partial P(x_\bullet)/\partial x_i$ være en derivasjon ❄

OPPGAVE 1.14. La $d\colon A \to M$ være additive og oppfylle produktregelen. Bruk at $1^2 = 1$ til å vise at $d(1) = 0$. Konkluder med at d er k-lineær hvis og bare hvis $d(a \cdot 1) = 0$ for alle $a \in k$. ✷

OPPGAVE 1.15. La $d\colon A \to M$ være en k-derivasjon. Vis at $\operatorname{Ker} d$ er en underring av A som er en k-algebra. ✷

OPPGAVE 1.16. Vis at om $A = k[x]$ og M er en A.modul, så er enhver derivasjon $d\colon A \to M$ entydig bestemt av verdien $dt \in M$, og for hvert element $m \in M$, finnes det en derivasjon d med $dt = M$. HINT: Vis at $dt^n = nt^n dt$. ✷

OPPGAVE 1.17. La k være en kropp av karakteristikk $p > 0$. Vis at et polynom $P(x) \in k[x]$ tilfredstiller $P'(x) = 0$ hvis og bare hvis $P(x) = Q(x^p)$ for et polynom $Q \in k[x]$. ✷

OPPGAVE 1.18. La k være en kropp og $k \subseteq K$ en separabel utvidelse; *e.g.*, $K = k[t]/f(t)$ der $f(t)$ er et polynom som er irredusibelt over k med $f'(t) \neq 0$. Vis at enhver k derivasjon $d\colon K \to M$ nødvendigvis er identisk lik null. ✷

OPPGAVE 1.19. La k være en kropp av positiv karakteristikk p og anta at $\alpha \in k$ er et element som ikke er en p-te potens. La $K = k[t]/(t^p - \alpha)$. Vis at for ethvert vektorrom M over K og hvert element $m \in M$ så finnes en k-derivajson $d\colon K \to M$ med $dt = m$. ✷

(1.4) Mengden av derivasjoner på med verdier i M betegnes vanligvis med $\operatorname{Der}_k(A, M)$. Strukturen M har som A-modul, induserer en A-modulstruktur på $\operatorname{Der}_k(A, M)$, og den er en naturlig undermodul av $\operatorname{Hom}_k(A, M)$, og den er på den naturlige måte en kovariant funktor i M; *i.e.*, om $\phi\colon M \to M'$ er en A-modul homomorfi, kan vi sende en derivasjon $d \in \operatorname{Der}_k(A, M)$ til $\phi \circ d\colon A \to M'$, som man lett verifiserer er en k-derivasjon på A med verdier i M'. Derivasjonenen $\operatorname{Der}_k(A, M)$ er også funktoriell i grunnringen k og algebraen A. I begge disse variable er den kontravariant. Om $k \to k'$ er en ringavbildning vil enhver k' derivasjon $A \to M$ opplagt også være en k-derivasjon. Vi har derfor en inklusjon $\operatorname{Der}_{k'}(A, M) \subseteq \operatorname{Der}_k(A, M)$.

(1.5) Den kovariante funktoren $\mathrm{Der}_k(A,-)$ på kategorien av A-moduler er representerbar. Det betyr i klartekst at det finnes en A-modul $\Omega^1_{A/k}$ og en isomorfi $\mathrm{Der}_k(A,-) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/k},-)$ av funktorer. Dette er ekvivalent med at vi har en *universell derivasjon* $d_A\colon A \to \Omega^1_{A/k}$, som altså har følgende egenskap: Hvergang $d'\colon A \to M$ er en k-derivasjon, så finnes en entydig A-modulavbildning $\alpha\colon A \to \Omega^1_{A/k}$ slik at $d' = \alpha \circ d_A$. Uttrykt diagramatisk ser dette slik ut:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d'"'] & \Omega_{A/k} \arrow[d, dashed, "A \,|\, \alpha"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

der, som sedvane er, den prikket pilen indikerer at diagrammet kan fylles ut til et kommuterende diagram. Elementene i modulen $\Omega^1_{A/k}$ kalles for *Kähler-differentialene*, eller kort og godt *differentialene* til A.

Om $k \to k'$ er en ringavbildning, så vi ovenfor at vi har en naturlig inklusjon $\mathrm{Der}_{k'}(A,M) \subseteq \mathrm{Der}_k(A,M)$. Den korresponderer til en *surjeksjon* $\Omega^1_{A/k} \to \Omega^1_{A/k'}$.

EKSEMPEL 1.2. La $A = k[t]$ være polynomringen over k i den variable t. Da er $\Omega^1_{A/k}$ fri over A og generert av elementet $d_A t$, *i.e.*, $\Omega^1_{A/k} = A \cdot d_A t$. Dette følger siden et element m i en vilkårlig A-modul M entydig bestemmer en derivasjon $A \to M$ med $dt = m$. ❄

(1.6) Anta at $\phi\colon A \to B$ er en k-algebraavbildning. Det er klart at diagonalen $d_B \circ \phi$ i diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "\phi"'] & \Omega^1_{A/k} \arrow[d, dashed, "\delta"'] \\ B \arrow[r, "d_B"'] & \Omega^1_{B/k} \end{tikzcd}$$

er en k-derivasjon, og på grunn av den universelle egeneskapen til $\Omega^1_{A/k}$ kan det derfor fylles ut med en A-modulavbildning δ til et kommutativt diagram. Nå er $\Omega^1_{A/k}$ en B-modul, så dette gir opphav til B-modulavbildning $d\phi\colon \Omega^1_{A/k} \otimes_A B \to \Omega^1_{B/k}$ som sender $\omega \otimes b$ på $b\delta(\omega)$.

OPPGAVE 1.20. Vis at vi har en eksakt følge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(B,M) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A,M)$$

der avbildningene er de naturlige. Bruk denne følgen til å vise at kokjernene til $d\phi$ er lik $\Omega^1_{B/A}$, *i.e.*, vi har den eksakte følgen som kalles *kotangent følgen* til ϕ:

$$\Omega^1_{A/k} \otimes_A B \xrightarrow{d\phi} \Omega^1_{B/k} \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \longrightarrow 0 \tag{1.9}$$

✱ KotangentFolge

(1.7) LOKALISERING Kähler-differentialene oppfører seg eksemplarisk under lokalisering, deres dannelse kommuterer kort og godt med lokalisering.

Vi har

LokaliseringOmega

Setning 1.14 *Anta at S er et multiplikativt system i A og la $i\colon A \to A_S$ være lokaliseringsavbildningen. Da er $di\colon \Omega^1_{A/k} \otimes_A A_S \to \Omega^1_{A_S/k}$ en isomorfi.*

BEVIS: Vi skal ved hjelp av den klassiske formelen for den deriverte til en brøk definerer en k-derivasjon $d\colon A_S \to \Omega^1_{A/k} \otimes_A A_S$. Den gir opphave til en A_S-modulavbildning $\Omega^1_{A_S/k} \to \Omega^1_{A/k} \otimes_A A_S$ som viser seg å være en den inverse avbildningen til di.

Som en begynnelse skal vi definere avbildningen d på par (a,s), men bruker allikevel skrivemåten a/s for argumentet, for ikke tape av syne hvor vi skal. Vi setter

$$d(a/s) = (sd_Aa - ad_As)s^{-2}$$

som altså forløpig er å betrakte som en tilordning til paret (a,s). Oppgaven vår — i tillegg til å sjekke at det gir en derivasjon — er å etablere at høyresiden kun avhenger av elementet $as^{-1} \in A_S$, slik at vi har en veldefinert avbildning definert på A_S.

Det er en helt banal anvendelse av produktregelen å verifisere at vi har likheten

$$d(ab/st) = as^{-1}d(b/t) + bt^{-1}d(a/s), \tag{1.10}$$

ParDet

der igjen leddene foreløpig er å betrakte som en funksjoner av parene (ab, st), (a,s) og (b,t).

Anta så at $ta = sb$. Fra denne likheten utleder vi ved hjelp av produktregelen identiteten $td_Aa + ad_At = sd_Ab + bd_As$, og løser vi ut td_Aa og setter inn i likeheten (1.10), finner vi

$$t^2(sd_Aa - ad_As) = ts(sd_Ab + bd_As - ad_At) - t^2ad_As = s^2(td_Ab - bd_At)$$

der den siste likheten følger siden $ta = sb$. Det viser at $d(a/s) = d(b/t)$. Tilslutt om $as^{-1} = bt^{-1}$, finnes et element u i S slik at $uta = usb$. Vi finner

$$d(b/t)u^{-1} + bt^{-1}d(1/u) = d(b/tu) = d(a/su) = d(a/s)u^{-1} + as^{-1}d(1/u)$$

og siden $as^{-1} = bt^{-1}$, følger det at $d(a/s) = d(b/t)$, og d er en veldefinert avbildning, og den er en k-derivasjon etter (1.10). ❏

Korollar 1.1 *Det kvasikoherente knippet $\Omega^1_{X/k}$ på $X = \operatorname{Spec} X$ tilordnet modulen $\Omega^1_{A/k}$ tilfredstiller*

- *Om $U = \operatorname{Spec} B \subseteq X$ er en åpen affin umdermengde, så er $\Gamma(U, \Omega^1_{X/k}) = \Omega^1_{B/k}$*
- *Om $x \in X$ tilsvarer primidealet $\mathfrak{p} \subseteq A$, så er $(\Omega^1_{X/k})_x = \Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$*

BEVIS: Det eneste som ikke følger umiddelbart av hva vi har gjort, er den første påstanden; men om $B = A_f$ er den umiddelbar. Vi har en k-lineær knippeavbildning $\mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/k}$ som er en k-derivasjon og derfor gir oss en k-derivasjon $B \to \Gamma(U, \Omega^1_{X/k})$. Den universelle egenskapen gir en B-lineær avbildning $\Gamma(U, \Omega^1_{X/k}) \to \Omega^1_{B/k}$ som lokalt er en isomorfi. ❏

Et sammenlappingsargument viser at vi for et vilkårlig skjema X over Y har en kvasikoherent $\mathcal{O}_X$-modul $\Omega^1_{X/Y}$ som for affine X og Y

(1.8) DERIVASJONENE TIL EN POLYNOMRING La oss se nøyere på differentialene og derivasjonene til polynomringen $A[t]$ der A er en k-algebra, og vi starter ut med derivsjonene. Det er klart at derivasjonenen til A spiller en rolle, så det er relasjonen mellom dem og derivasjonene til $A[t]$ det dreier seg om.

La M være en vilkårlig $A[t]$-modul. Vi skal vise at vi har en naturlig isomorfi

$$\operatorname{Der}_k(A[t], M) \simeq \operatorname{Der}_k(A, M) \oplus M, \tag{1.11}$$

der $A[t]$-modulstrukturen til $\operatorname{Der}_k(A, M)$ er gitt ved multiplikasjon i M. Avbildningen sender en derivasjon $d\colon A[t] \to M$ til paret som består av verdien $d(t) \in M$ og restriksjonen $d|_A$ til A-undermodulen $A \subseteq A[t]$ av "konstante" polynomer. Det gir oss en avbildning $\operatorname{Der}_k(A[t], M) \to \operatorname{Der}_k(A, M) \oplus M$ som er $A[t]$-lineær. KanonDerAvbld

Denne avbildningen er injektiv siden formelen $d(at^n) = t^n d(a) + nat^{n-1}d(t)$ viser at den er bestemt av sin verdi på t og sin restriksjon til konstantene $A \subseteq A[t]$.

Omvendt, gitt en derivasjon $\delta \in \operatorname{Der}_k(A, M)$ og et element $m \in M$. Bertraktet som k-modul er A den direkte summen $A[t] = \bigoplus_{n \geq 0} A \cdot t^n$, og det medfører at vi kan definer en k-lineær avbildning fra $A[t] \to M$ ved tilordningen $at^n \mapsto t^n \delta(a) + nat^{n-1}m$. Det er en enkel sak å sjekke at den faktisk oppfyller produktregelen — den er jo laget til det.

Oversetter vi isomorfiene i (1.11) til modulene av differentialer, finner vi følgende:

Setning 1.15 *Anta at A er k-algebra og t en variabel. Da har vi en naturlig isomorfi*

$$\Omega^1_{A[t]/k} \simeq \left(\Omega^1_{A/k} \otimes_A A[t]\right) \oplus A[t]dt.$$

BEVIS: Gitt isomorfien (1.11) ovenfor, er den eneste nødvendige bemerkning at vi har en naturlig isomorfi $\operatorname{Hom}_A(\Omega^1_{A/k}, M) \simeq \operatorname{Hom}_{A[t]}(\Omega^1_{A/k} \otimes_A A[t], M)$, der en avbildning $\alpha\colon \Omega^1_{A/k} \to M$ tilsvarer avbildningen gitt ved $\alpha'(\omega \otimes t^n) = t^n \alpha(\omega)$ (sjekk at dette virkelig gir en isomorfi av $A[t]$-moduler). ❏

Avbildningen i setningen går fra høyre mot venstre. Den sender et element på formen $\omega \otimes f$ til $f \cdot di(\omega)$, der $i\colon A \to A[t]$ identifiserer A med "konstantene" i $A[t]$, mens $A[t]dt$ er naturlig inkludert i venstresiden.

(1.9) Polynomringen over en kropp er et svært viktig spesialtilfelle. Vi lar k være en kropp og lar $A = k$ i det vi gjorde i forrige paragraf. Ved en enkel induksjon på antall variable etablerer man følgende beskrivelse av differentialene til en polynomring:

Setning 1.16 *La k være en kropp og la $B = k[t_1, \dots, t_r]$ være polynomrimgen i r uavhengige variabler. Da er $\Omega^1_{B/k}$ en fri B-modul med $dt_1, \dots, dt_r$ som basis; det vil si*

$$\Omega^1_{B/k} = \bigoplus_{1 \le i \le r} B dt_i. \tag{1.12}$$

KanIsoPolyRing

Vi lokaliserer nå dette resultatet i det multiplikative systemet $S \subseteq k[t_1, \dots, t_r]$ av elementer forskjellig fra null. Da blir jo høyre siden i (1.12) et vektorrom over den rasjonale funskjonskroppen $K = k(t_1, \dots, t_r)$ med basis $dt_1, \dots, dt_r$, mens venstresiden blir isomorf med $\Omega^1_{K/k}$ fordi dannelse av differensialmodulen kommuteter med lokalisering, slik vi så i setning 1.14 på side 32. Dette gir

DiffRasjFunKropp **Setning 1.17** *Anta at k er en kropp. La $K = k(t_1, \dots, t_r)$ være den rasjonale funksjonskroppen i r variable over k. Da er $\Omega^1_{K/k}$ av dimensjon r som vektorrom over K med $dt_1, \dots, dt_r$ som en basis; altså*

$$\Omega^1_{K/k} = \bigoplus_{1 \le i \le r} K dt_i.$$

(1.10) SEPARABLE KROPPSUTVIDELSER Situasjonen vi ser på i denne paragrafen er at $k \subseteq K$ er en separabel endelig utvidelse. Vi kan anta at den er en enkel utvidelse, det vil si den er fremkommet ved å adjungere ett element til k. Et klassisk resultat forteller oss nemlig at alle endelige separable kropssutvidelser har et slikt primitivt element.

Kroppen K kan beskrives som kvotientringen $k[t]/(f(t))$ der $f(t)$ er minimalpolynomet til det adjungerte elementet, og at utvidelsen er separabel, betyr at den deriverte $f'(t)$ ikke forsvinner i polynomringen $k[t]$, og derfor forsvinner heller ikke dens bilde i K. Men siden $f(t) = 0$ i K, følger det at vi har relasjonen $0 = f'(t)dt$ i $\Omega^1_{K/k}$, noe som medfører at $dt = 0$ i $\Omega^1_{K/k}$. Kotangentfølgen for kvotientavbildningen $k[t] \to K$ ser slik ut

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{k[t]/k} \otimes_{k[t]} K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega^1_{K/k} \arrow[r] & \Omega^1_{K/k[t]} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
K dt & & 0 &
\end{tikzcd}$$

der $\Omega^1_{K/k[t]} = 0$ fordi $k[t] \to K$ er surjektiv. Vi så nettopp at dt sendes på null i $\Omega^1_{K/k}$, og i lyset av hvordan kotangentfølgen ser ut, medfører det at $\Omega^1_{K/k} = 0$. Vi har bevist

Lemma 1.11 *Dersom $k \subseteq K$ er en endelig separabel kroppsutvidelse, så er $\Omega^1_{K/k} = 0$.*

Kombinerer vi dette med setning 1.17 ovenfor, får vi

Setning 1.18 *Anta at k er en kropp og at K er endeliggenerert separabel kroppsutvidelse av k av transendensgrad r. Da er $\dim_K \Omega^1_{K/k} = r$.*

Mere presist, om $t_1, \dots, t_r$ er en transendensbasis for K over k, så er $dt_1, \dots, dt_r$ en basis for $\Omega^1_{K/k}$ over K.

$D_k(X)$ være $\Omega_{k(X)/k}$. Den kalles modulen av rajonale (eller også meromorfe) differentialer på X. Den er et vektorrom over $k(X)$ som faktisk er av rang en. Dersom t er en parameter i punktet $x \in X$, så er dt en basis for $D_k(X)$. Dette følger av at $\Omega_{k(X)/k} = k(X) \otimes_k \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$ og at $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/k}$ er fri av rang en generert av dt. et vektorrom over k. Ethvert rasjonal differentail er på formen $f\,dt$ der $f \in kX$ er en rasjonal funksjon.

$u = gt$, er $du = gdt + tdg = (g + tg')dt$ og $g + tg'$ er en enhet i $\mathcal{O}_{X,x}$. Det følger at $v_x(\omega) = v_x(f)$ er veldefinert.

Divisor (ω) gitt ved de lokale data (U, f_x)

Residue=xxx

Residue-formelen.

Repartisjoner

I denne paragrafen forlater vi for en stund skjema-verdenen og setter vi oss selv i "varitet-modus". Det vil si at X er skal være en kurve over en algebraisk lukket kropp k, når vi skriver $x \in X$, legger vi også i det at x er et lukket punkt i X. I de Vi skal ogaå anta at X er regulær og sammenhengende, og som oftest skal X også være proper over k. Vi vet at den lokale ringen $\mathcal{O}_{X,x}$ i (det lukkete) punktet $x \in X$ er en diskret valuasjonsring, og valuasjonen betegner vi med v_x. En divisor D på X er entydigbestemt av sine ordner i de forskjellige punktene x, så vi har $D = \sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x D$, og alle funksjoner $X \to \mathbb{Z}$ med endelig støtte, opptrer som ordensfunksjonen til en divisor.

Produktet $\prod_{x \in X} k(X)$ spiller en viktig rolle i det følgende. Å gi et element $r = \{r_x\}$ der er ikke annet enn å gi en rasjonal funksjon $r_x \in k(X)$ for hvert punkt x i X; de forskjellige rasjonale funksjonene r_x er *a priori* helt uavhengig av hverandre, men det kan for enkelte elementer selvsagt være sterke sammenhenger mellom de forskjellige r_x. For eksempel ligger funksjonskroppen $k(X)$ "diagonalt" inne i $\prod_{x \in X} k(X)$: Til enhver funksjon $f \in k(X)$ har vi elementet $r(f)$ i produktet som er gitt ved $r(f)_x = f$ for alle x.

(1.11) Vi følger Serre og sier at et element $r = \{r_x\} \in \prod_{x \in X} k(X)$ er en *repartisjon* dersom $r_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ for nesten alle x. Det vil si at for alle x, på et endelig antall nær, er den rasjonale funksjonen r_x regulær nær x. Mengden av alle repartisjoner betegner vi med R_X. Det er en klart en underring av produktet $\prod_{x \in X} k(X)$, siden $r_x r'_x$ er regulær nær x om både r_x og r'_x er det, og den "diagonale versjonen" av funksjonskroppen $k(X)$ ligger på en naturlig måte som en underring av R_X. Om $f \in k(X)$, så vet vi at f ligger i $\mathcal{O}_{X,x}$ for nesten alle x, og følgelig er $r(f)$ en repartisjon.

La nå D være en divisor på X. Det bestemmer et under $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{O}_X(D) \subseteq k(X)$, der $k(X)$ er å betarkte som et konstant knippe på X. Stilken $\mathcal{O}_X(D)x$ til $\mathcal{O}_X(D)$ i punktet x består av de $f \in K(X)$ slik at $v_x(f) \geq -\operatorname{ord}_x D$

Vi lar $R_X(D) \subseteq R_X$ betegne undermengden bestå av de repartisjonene r slik at $v_x(r_x) \geq -\operatorname{ord}_x(D)$; eller sagt noe annerledes, det er de r slik at r_x ligger i stilken $\mathcal{O}_X(D)_x$ til knippet $\mathcal{O}_X(D)$ i x. Da er $R_X(D)$ om ikke annet, så iallfall et under-k-

vektorrom av R_X.

Kvotienten $R_X/R_X(D)$ ligger naturlig inne i produktet $\prod_{x\in X} R_X/\mathcal{O}_X(D)_x$, og den kan identifisers med den dirkete summen $\bigoplus_{x\in X} R_X/\mathcal{O}_X(D)_x$ siden allerede elementene i R_X ligger i $\mathcal{O}_{X,x}$ for alle x med unntak av et endelig antall.

Første skritt i retning av dualtitetsteoremet er følgende:

Setning 1.19 *Vi har en kanonisk isomorfi $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ med $R_X/(R_X(D) + k(X))$.*

BEVIS: Utgangspunktet i beviset er den korteksakt følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow k(X) \longrightarrow k(X)/\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow 0 \tag{1.13}$$

KortEkaktRepart der $k(X)$ er (det konstante) knippet av rasjonale funksjoner på X. Dette knippet er et *flasque*[3] knippe, og derfor forsvinner alle dets kohomologigrupper, spesielt er $H^1(X, k(X)) = 0$, og vi har selvsagt at $H^0(X, k(X)) = k(X)$. Den langeksakte følgen avledet fra den korteksakte følgen (1.13) ovenfor gir derfor

$$k(X) \longrightarrow H^0(X, k(X)/\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow 0.$$

Det gjenstår å identifisere globalseksjonene til $k(X)/\mathcal{O}_X(D)$.

Om $[r]$ er elementet i stilken til $k(X)/\mathcal{O}_X(D)$ i punktet x indusert av den rasjonale funksjonen r, så kan $r \in k(X)$ gjerne oppfylle $v_x(r) < -\mathrm{ord}_x D$ (*i.e.*, $r \notin \mathcal{O}_X(D)_x$), og det skjer om $[r]$ er forskjellig fra null. Men på en omegen U om x gjelder det at $v_y(r) = 0$ om $y \neq x$; den rasjonale funksjonen r er jo regulær og ikke forsvinenende på en omegn U om x, og likeledes er $\mathrm{ord}_x D = 0$ på en omegn, som vi kan anta er den samme som omegnen U ovenfor. I stilkene til knippet $k(X)/\mathcal{O}_{X,x}$ i punkter $y \in U \setminus \{x\}$ forsvinner derfor r.

Med følgende lemma er beviset avsluttet, det gir oss nemlig at $H^0(X, k(X)/\mathcal{O}_X(D)) = \bigoplus_{x\in X} k(X)/\mathcal{O}_X(D)_x = R/R(D)$.

Lemma 1.12 *La F være et knippe på et kvasikpompakt topologisk rom X slik at de lukkede punktene ligger tett. Anta at det for hvert punkt $x \in X$ og hvert element $s \in F_x$ finnes en åpen omegn U om x og en seksjon $\sigma \in \Gamma(U, F)$ som induserer s i F_x og forsvinner på $U \setminus \{x\}$. Da er $\Gamma(X, F) = \bigoplus_{x\in X} F_x$ der summen er over de lukkede punktene i X.*

❑

BEVIS(AV LEMMA): Vi har injektiv avbildning

$$\Gamma(X, F) \to \prod_{x\in X} F_x$$

[3] Det er umulig å bøye *flasque* i intetkjønn!

som sender en seksjon σ til σ_x i hver stilk. Vi skal vise at bildet er lik den direkte summen av stilkene F_x; *i.e.,* at en globalseksjon av F kun er forskjellig fra null i et endelig antall punkter, og at både punktene og "verdiene" i dem er uten føringer.

Om $\sigma \in \Gamma(X, F)$ så finnes en omegn U_x om hver x slik at $\sigma|_{U_x \setminus \{x\}}$ forsvinner. Siden X er kvasikompakt kan X dekkes av endelig mange av omegnene U_x, la oss si av $U_{x_1}, \ldots, U_{x_r}$. Det følger at σ forsvinner i alle punkter untatt i punktene $x_1, \ldots, x_r$.

Omvendt, la $x_1, \ldots, x_r$ være punkter i X, og anta at vi er gitt et element $s_i \in F_{x_i}$ for $i = 1, \ldots, r$. Hver s_i kan utvides til en seksjon σ_i av F over en omegn U_i om x_i som forsvinner på $U_i \setminus \{x_i\}$. Lar vi $V_i = U_i \setminus \{x_j\}_{j \neq i}$ danner V_i-ene en åpen overdekning av X som er slik at $V_i \cap V_j$ ikke inneholder noe punkt blant $x_1, .., x_r$. Derfor er $\sigma|_{V_i \cap V_j} = 0 = \sigma_j|_{V_i \cap V_j}$, og σ_i-ene lapper sammen til en globalseksjon σ av F som har den egenskapen vi ettertrakter. ❑

(1.12) LAURENT-HALER I denne paragrafen er A en diskret valuasjonsring som er en algebra over sin egen restklassekropp $k = A/\mathfrak{m}$; der $\mathfrak{m}$ selgsagt er det maksimale idealet i A. Eksempler kan være lokale ringer til kurver av endelig type over en algebraisk lukket kropp; eller for den saks skyld den lokale ringen i et punt av kodimensjon én til en normal varietet over enn algebraisk lukket kropp. Om k ikke er algebraisk lukket, må man trå varsommere. Selv om A er en k-algebra av endelig type, er $A/\mathfrak{m}$ en endelig utvidelse av k som ikke nødvendigvis er lik k slik vi forlanger; sagt annerledes, punktet $x \in \operatorname{Spec} A$ som tilsvarer det masksimale idaletm $\mathfrak{m}$, er et k-punkt.

Vi lar K være kvotientkroppen til A og betegner den normaliserte valusjonen tilhørende A med v. Kroppen K har en nedstigende filtrasjon (uendelig i begge ender) av A-undermoduler K_i gitt ved $K_i = \{\, f \in K \mid v(f) \geq i \,\}$. Vi har $K_0 = A$ og $K_i = \mathfrak{m}^i$ for $i \geq 0$.

Videre er K_i/K_{i+1} et vektorom over k av dimensjon én, for om t er en uniformiserende parameter, er klassen $[t^i]$ til t^i en basis for K_i/K_{i+1}.

Lemma 1.13 *Ethvert element $f \in K$ kan skrives på formen*

$$f = \sum_{i>0} a_{-i} t^{-i} + g$$

der g ligger i A.

BEVIS: Om $f \in A$, er selvsagt påstanden triviell. La $f \in K$ og la $v(f) = n < 0$. Da er $f \in K_n$ og klassen $[f]$ til f i K_n/K_{n+1} er et skalarmultiplum av generatoren $[t^n]$, la oss si med skalaren $\alpha \in k$. Funksjonen $f - \alpha t^n$ avbildes da på null i K_n/K_{n+1}. Følgelig er $v(f - \alpha t^n) = n + 1$, og ved induksjon på $|v(f)|$kan vi skrive

$$f = \sum_{-i>0} a_{-i} t^{-i} + g$$

og vi er fremme. ❑

(1.13) RESIDU Nå velger vi en uniformiserende parameter t i A, og lar $\omega = f\,dt$ være et differential i $\Omega_{K/k}$. Vi definerer $f \in K$ *residuet* $\operatorname{Res}_t f\,dt$ til f relativt til t som koeffisienten til a_{-1} i prinsipaldelen til f relativt til t. Vi har

$$f\,dt = a_{-n}t^{-n}\,dt + \dots a_{-2}t^{-2}\,dt + \operatorname{Res}_t f t^{-1}dt + gdt$$

der $g \in A$. Det er selvsagt et stort poeng, som vi snart kommer tilbake til, at $\mathrm{res}_t^{[}]\omega$ ikke avhenger av hvilken uniformiserende parameter vi bruker. Med andre ord, om u er en annen uniformiserende parameter så gjelder det at

$$\operatorname{Res}_t \omega = \operatorname{Res}_u \omega.$$

Dette er i full analogi til hva vi kjenner fra teorien for funksjoner av en kompleks variabel. I det tilfellet følger uavhengigheten fra *e.g.*, Cauchy's resdiue-teorem.

Lemma 1.14 *Med betngelsene ovenfor har vi*

- *Residuet er en k-lineær avbildning* $\operatorname{Res}\colon \Omega_{A/k} \to k$*;*
- $\operatorname{Res}_t(f dt) = 0$ *dersom* $t \in A$*;*
- $\operatorname{Res}_t(df) = 0$ *for alle* $f \in K$*;*
- $\operatorname{Res}_t(g^{-1}dg) = 0$ *for alle* $g \in K, g \neq 0$.

BEVIS: Disse er enkle å sjekke. Den første er triviell. Den andre følger følger siden elementer i A per definisjon er residue-frie. For å etablere den tredje, skriver vi

$$f = \sum_{i>0} a_{-i}t^{-i} + g.$$

der $g \in A$. Det gir at $fdt = \sum_{i>0}(-i)a_{-i}t^{-i-1}dt + dg$ der $dg \in \Omega_{A/k}$. Leddet til t^{-1} forsvinner således. Til den siste skriver vi $g = t^n\alpha$ der $n = v(g)$ og $\alpha \in A$ er en enhet. Derivasjon gir at $dg = nt^{n-1}\alpha dt + t^n d\alpha$ som medfører at

$$g^{-1}dg = nt^{-1}dt + \alpha^{-1}d\alpha$$

nå er $d\alpha \in \Omega_{A/k}$ og α invertibel i A gir at $\alpha^{-1}d\alpha \in \Omega_{A/k}$ og vi er fremme. ❑

Resten av beviset for dualitetsteoremet bygger på følgend resultat som vi av ikke skal bevise:

Teorem 1.2 *La X være en regulær kurve, proper over en algebraisk lukket kropp k. La $\omega \in \Omega^1_{A/k}$. Da gjelder følgende*

- *Om $x \in X$ er et punkt og t og u er to uniformiserende parametre i x, så er* $\operatorname{Res}_t \omega = \operatorname{Res}_u \omega$.
- *Vi har* $\sum_{x\in X} \operatorname{Res}_x \omega = 0$.

Repartisjonene $R(X)$ danner et vektorrom over $k(X)$. Dersom $f \in k(X)$ og r er en repartisjon, så er produktet fr repartisjonen gitt som $(fr)_x = fr_x$ — det er å bemerke at dette gir mening siden en rasjonal funksjon er regulær unntatt i et endelig antall punkter.

Vi lar $J(D) = \mathrm{Hom}_k(R_X/R_X(D) + k(X), k)$ være rommet av lineærfunksjonaler på $I(D) = R_X/R_X(D) + k(X)$. Man kan tenke på det som de lineær funksjonalene på repartisjonene som forsviner på underrommet $R_X(D)+k(X)$. Således er $J(D) \subseteq \mathrm{Hom}_k(R_X, k)$. Dersom $D' \geq D$ så er så klart $R_X(D) \subseteq R_X(D')$ siden $-\mathrm{ord}_x D' \leq -\mathrm{ord}_x D$, og dette medfører at $J(D') \subseteq J(D)$. Vi lar $J = \bigcup_D J(D)$.

1) Dette er et vektorrom over $k(X)$ utstsyrt med operasjonen $f\alpha(r) = \alpha(fr)$. Dersom α forsvinner på $R_X(D)$, forsvinner $f\alpha$ på $R_X(D+(f))$ fordi $\mathrm{ord}_x fr = \mathrm{ord}_x f + \mathrm{ord}_x r \geq \mathrm{ord}_x f - (\mathrm{ord}_x D + \mathrm{ord}_x f) = -\mathrm{ord}_x D$ hvergang r ligger i $R_X(D + (f))$, og følgelig er $\alpha(fr) = 0$.

Setning 1.20 *Vektorrommet J er av dimensjon høyst en over $k(X)$*

BEVIS: Anta det motsatte og la α og α være to elementer i J som er lineært uavhenig over $k(X)$. Vi utlede en absurditet fra dette. La D være en divisor slik at α og α' begge ligger i $J(D)$ og la $d = \deg D$.

For hvert naturloge tall lar vi Δ_n være en divisor med $\deg \Delta_n = n$. Hvis $f \in L(\Delta_n)$ så er $f\alpha \in J(D - \Delta_n)$.

Avbildningen $(f, g) \to f\alpha + g\alpha'$ er således en injeksjon

$$L(\Delta_n) \oplus L(\Delta_n) \to J(D - \Delta_n),$$

vi skal estimere dimensjonene, ig se at dette gir en motsigelse.

$$\dim J(D - \Delta_n) = n - \deg D + g - 1 + \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D - \Delta_n)) = n - \deg D + g - 1$$

for $n >> 0$; det vil si for $n \deg \deg D$, mens

$$\dim L(\Delta_n) \geq n + 1 - g$$

Dette er umulig. ❏

2. Del

Oppblåsing

I dette avsnittet skal i all hovedsak X være en irredusibel og redusert flate, det vil si et separert og noethersk skjema som irredusibelt og redusert og som er av dimensjom to. Vi skal også (uten tap av almengyldigheten siden oppblåsning av et punkt er en lokal affære) anta at X er affin og skrive $X = \operatorname{Spec} A$,

Vi skal konsentrere oss om ett lukket punkt $x \in X$ som vi skal anta er et *regulæert* punkt på X. Det betyr at den lokale ringen $\mathcal{O}_{X,x}$ er en regulær ring. Selvsagt er det svært interessant å blåse opp singulære punkter også, men det ligger ligger langt bortenfor horisonten til dette avsnittet.

Punktet x tilsvarer et maksimalt ideal $\mathfrak{m}$ i A, og vi skal anta at $\mathfrak{m}$ er generert av *to* elementer u og v. Dette gjelder ikke for generelle regulære ringer av dimensjon to, men påfører oss allikevel ingen sterk begrensning. Oppblåsningskonstruksjonen er lokal omkring x, og i den lokale ringen $A_{\mathfrak{m}}$ har $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ to generatorer (løft generatorer for kotangentrommet $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ til $A_{\mathfrak{m}}$). Dette medfører at $\mathfrak{m}$ er generert av to elementer i en omegn av x. Sagt presist, for et passende element $f \in A$ vil $\mathfrak{m}A_f$ være generert av to elementer. Restklassekroppen $k(x) = A/\mathfrak{m}$ betegner vi med k.

(2.14) Vi har noen få enkle, men viktige, eksempler i bakhodet hele tiden. Et er det affine planet $\mathbb{A}^2_k$, altså $\operatorname{Spec} A$ med $A = k[u, v]$, der k er en vilkårlig kropp, gjerne av positiv karakteristikk og ikke nødvendigvis algebraisk lukket. Men, selvsagt, det komplekse tilfellet med $k = \mathbb{C}$ er et sentralt spesialtilfelle, både for anvendelsene og ikke minst for forståelsen. Det er det komplekse tilfellet som gir oss mesteparten av intuisjonsbildet. Punktet x skal i eksemplet være origo, som er gitt ved idealet $\mathfrak{m} = (u, v)$. Dersom k er algebraisk lukket er ikke dette noen innskrenking; man kan velge koordinaten slik at et vilkårlig gitt punkt blir liggende i origo. Er derimot k ikke algebraisk lukket er det vesentlig mer komplisert for de fleste punkter, men disse punktene kvalifiserer ikke som *enkle eksempler* selvom teorien selvsagt omfatter dem.

Det andre eksemplet er $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, altså $\operatorname{Spec} A$ der $A = \mathbb{Z}[t]$. Det er helt og holdent aritmetisk av natur. (Man kan selvsagt også se på $A = R[u]$ der R er en dedekinsk ring, *e.g.,* heltallsringen in en algebraisk tallkropp, men det krever muligens en lokalisering som ovenfor). I dette tilfellet skal punketet vårt være på formen (p, t) der $p \in \mathbb{Z}$ er et primtall. Det finnes mange andre lukkede punkter i $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$, men de kvalifisere ikke til å være *enkle* eksempler (men dog *gode* eksempler!).

OPPGAVE 2.1. Vis at ethvert maksimalt ideal $\mathfrak{m}$ i $\mathbb{Z}[t]$ er på formen $(p, f(t))$ der p er et primtall og $f(t)$ er et polynom hvis reduksjon mod p er irredusibelt i $\mathbb{F}_p[t]$. ✸

En av de store forskjellene på disse to tilfellene er at om $A = k[u, v]$ er restklassekroppen k inneholdt i A, og vi multiplisere elementene i A med skalarer fra k. Men er $A = \mathbb{Z}[u]$, for eksempel, ligger selvsagt ikke restklassekroppen $k = \mathbb{F}_p$ inne i A, det finnes faktisk ingen kropp inneholdt i A, og dette gjør detv tekninske relativt komplisert og forklarer en del av den tekniske akrobatikken vi skal gjennom.

Det komplekse tilfellet

Oppblåsningen av origo i det komplekse affine planet $\mathbb{C}^2$ er en god start for den generlle teorien. Det er viktig å forstå dette eksemplet. Den grunnleggende geometriske intuisjonen finner vi her, og alle de generelle scenariene vi skal komme innom har sin formelle rot i dette eksemplet.

Den projektive linjen $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ består av alle linjer gjennom origo, og vi snakker kun om komplekse linjer. En linje gjennom origo har en ligning på formen $Au + Bv = 0$ der A og B er to komplekse tall ikke begge null, og de er entydig bestemt av linjen opp til en felles skalar. Denne linjen tilordnes punktet i P^1_C med homogene koordinater $(-B; A)$; det representer i en viss forstand "stigningskoeffisienten" til linjen.

Inne i produktet $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ har vi en undervarietet $\mathbb{BL}$ som man med rette kaller den "universelle linjen". Den er slik laget at om p betegner restriksjonen av projeksjonen til $\mathbb{BL}$ på $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, så består fiberen til p over et punkt $(U; V) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ av linjen gjennom origo som tilsvarer $(U; V)$. Med andre ord, ligning for $\mathbb{BL}$ i $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ er

$$uV - vU = 0. \tag{2.1}$$

KanLig

VektBunt (2.15) Denne avbildningen er en kompleks linjebunt. Den er lokaltriviell, og overgangsfunksjonene er lineær. For eksempel, over den åpne mengden $D_+(U) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, der $U \neq 0$, er den triviell. Om vi lar $Y = \pi^{-1}(D_+(U)) \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ har vi nemlig en isomorfi $\mathbb{C} \times D_+(U) \simeq Y$. Den realiseres ved avbildningen

$$\mathbb{C} \times D_+(U) \to \mathbb{C}^2 \times D_+(U)$$

der $(t, (U; V))$ sendes til $((t, tVU^{-1}), (U; V))$. Det er lett å se at denne avbildningen er veldefinert med verdier i Y, og at den faktisk er en isomorfi. Den har nemlig avbildningen $((u, v), (U; V)) \to (u, (U; V))$ som invers.

Oppgave 2.2. Gjenta hva vi nettopp gjorde, men over undermengden $D_+(V) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ der $V \neq 0$. Sjekk at overgangsfunksjonene på snittet D_+UV er lineære. Hint: De gjensidig inverse overgangsfunskjonene er (selvsagt) VU^{-1} og UV^{-1}. ✷

(2.16) Nå har vi også en projeksjon fra produktet $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ned på den første faktoren. Det er dens restriksjon til $\mathbb{BL}$ som skal spille førstefiolin i dette avsnittet. Vi betegner den med π. De to projeksjonen fra $\mathbb{BL}$ kan illustreres i følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[l, "pr"'] \arrow[r] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\
& \mathbb{BL} \arrow[ul, "\pi"] \arrow[u, hook] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

La oss bestemme fiberen til π over punktet $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$. Den ligger innehold i fiberen $pr^{-1}(u_0, v_0)$ som er isomorf med $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ og er gitt ved ligningen vi får ved å spesialisere (u, v) til (u_0, v_0) i ligning 2.1 ovenfor, altså

$$u_0 V - v_0 U = 0. \tag{2.2}$$

Dersom minst ett av tallene u_0 eller v_0 er forskjellig fra null, er dette presis ett punkt; KanLigTo
ganske enkelt punktet med homogene koordinater $(u_0; v_0)$. Er derimot $u_0 = v_0 = 0$, gir ligningen 2.2 ingen føringer, og fiberen blir hele $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Vi lar $E = \pi^{-1}(0,0)$. Den kalles den *eksepsjonelle fiberen* og er altså isomorf med $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Utenfor E gir avbildningen π en isomorfi mellom $\mathbb{BL} \setminus E$ og $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dette følger av at fibrene dens over andre punkter enn origo består av ett punkt. Eller, man kan direkte lage en invers ved hjelp av den muligens noe mysteriøse, men absolutt tautologiske tilordningen

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (u, v) \to ((u, v), (u; v)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

Avbildningen π kollapser en kopi av $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ til origo, nemlig $\{(0,0)\} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, men ellers lar den alt annet være uforandret. I et noe annet perspektiv kan vi si at origo er blåst opp til en hel projektiv linje i $\mathbb{BL}$, så derfor kalles $\mathbb{BL}$ for *oppblåsningen* av origo.

(2.17) Det er et interessant topolgisk aspekt ved oppblåsningen som er relatert til Hopf-fibrasjonen. Denne er som kjent en fibrasjon $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ med fibre alle lik $\mathbb{S}^1$. Sfæren $\mathbb{S}^3$ er inneholdt i $\mathbb{C}^2$ som punktene (u, v) med $|u|^2 + |v|^2 = 1$, og disse befinner seg jo godt unna origo, så $\pi^{-1}\mathbb{S}^3$ er homeomorf med $\mathbb{S}^3$. Med andre ord har vi en kopi av $\mathbb{S}^3$ liggende inne i $\mathbb{BL}$, og den avbildes via projeksjonen p ned på $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, som jo er homeomorf med $\mathbb{S}^2$. Denne avbildningen er nettopp Hopf-fibrasjonen.

Ved å lene seg på paragraf 2.15 der vi så at den universelle linjen var en linjebunt, er ikke vanskelig å se at fibrene i p restriktert til $\mathbb{S}^3$ alle er homeomorfe med $\mathbb{S}^1$ (enhetssirkelen i den korresponderenede linjen), og at den er triviell over $D_+(U)$ og $D_+(V)$.

Den kirurgisk anlagte kan således tenke seg at oppblåsningen betsår i å skjære ut ballen $\{ (u,v) \mid |u|^2 + |v|^2 \leq 1 \}$ fra $\mathbb{C}^2$ og erstatte den med $\mathbb{BL} \cap \{ (u,v) \mid |u|^2 + |v|^2 \leq 1 \} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Begge disse mangfoldighetene har sfæren $\mathbb{S}^3$ som rand, og det er interessant (sett i lyset av at sirkelfibrene er linket i $\mathbb{S}^3$) at den siste kan beskrives som Hopft-fibrasjonen med alle sirkelfibrene utfyllt med disker.

(2.18) I en reell scenografi gir denne konstruksjonen de gode gammeldagse polarkoordinatene. Den reelle projektive linjen $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ er ikke noe annet en enhetssirkelen $U^2+V^2 = 1$. Og skriver vi $U = \sin\theta$ og $V = \cos\theta$, er $\widehat{X}$ gitt ved ligningen

$$u\cos\theta - v\sin\theta = 0$$

Vi finner inklusjonen

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \widehat{X} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$$

definert ved tilordninengne $t,\theta) \to ((t\cos\theta, t\sin\theta),\theta)$ som gir en isomorfi med $\widehat{X}$. Polarkoordinatene ligger da i dagen, med det lille forbehold at t både kan anta negative og positive verdier. Hvert punkt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ har således to forbilder (=preimages!!). Dette gjenspeiler at hver linje gjennom origo i denne beskrivelsen opptrer to ganger, med vinkel θ og vinkel $\pi + \theta$.

(2.19) LIGNINGENE FOR DEN EKSEPSJONELLE DIVISOREN E Vi lar $\mathbb{BL}_U = \mathbb{BL} \cap D_+(U)$ betegne umdermengden av $\mathbb{BL}$ der $U \neq 0$ og $\mathbb{BL}_V = \mathbb{BL} \cap D_+(V)$ mengdene av punkter der $V \neq 0$. Fiberen $\pi^{-1}(0,0)$ er naturligvis gitt ved ligningene $u = 0$ og $v = 0$. I $\mathbb{BL}_U$ gjelder likheten $v = uVU^{-1}$ så den andre ligningen følger av den første, og E er derfor gitt ved $u = 0$, mens i $\mathbb{BL}_V$ er $u = vUV^{-1}$, og E er gitt ved $v = 0$.

I en mer algebraisk formulering vil $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathbb{BL}}$ være et invertibelt knippe på $\mathbb{BL}$ med lokale generatorer u og v i henholdsvis $\mathbb{BL}_U$ og $\mathbb{BL}_V$. Dette knippe betegnes med $\mathcal{O}_{\mathbb{BL}}(-E)$.

(2.20) PROPER TRANSFORM AV LINJERVarieteten $\mathbb{BL}$ var jo i utgangspunktet den "universelle linjen" gjennom origo. Den avbildes ved hjelp av p ned på $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, og $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ fungerer som et parameterrom for linjene gjennom origo. Den eksepsjonelle fiberen er en seksjon til p, og derfor parametriser også E linjene gjennom origo. Punktet $((0,0),(\beta;-\alpha)) \in E$ tilsvarer linjene $\alpha u + \beta v = 0$.

Det kan være vel verdt å se på de lokale detaljene og sammen hengen mellom tilbaketrekningen av en linje til $\mathbb{BL}$ og fiberen i p tilsvarende linjen. Vi har

LigningLinje

Lemma 2.1 *La $L \subseteq \mathbb{C}^2$ være en linje gjennom origo betraktet som enn Cartier-divisor på $\mathbb{C}^2$. Da spaltes tilbaketrekningen $\pi^{-1}L$ som en sum*

$$\pi^{-1}(L) = L^p + E$$

der L^p er fiberen i p som tilsvarer linjen L.

Fiberen L^p kalles for den *proper transformen* til L.

BEVIS: La $\alpha u+\beta v=0$ være ligningen for L. Da er L^p fiberen til p over punktet $(\beta;-\alpha)$ i $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, og har ligningen $\beta U-\alpha V=0$.

Trekker vi funksjonen $\alpha u+\beta v$ opp på $\mathbb{BL}$ og betrakter den i den åpne mengden $\mathbb{BL}_U$ der $U\neq 0$, finner vi

$$\alpha u+\beta v=\alpha u+\beta uVU^{-1}=u(\alpha-\beta VU^{-1}),$$

som er ekvivalent med

$$u(\alpha U-\beta V)=0,$$

og om $V\neq 0$ gir et tilsvarende argument ligningen

$$v(\alpha U-\beta V)=0.$$

Gitt at ligningen for E er henholdsvis $u=0$ og $v=0$ i $\mathbb{BL}_U$ og $\mathbb{BL}_V$ er vi fremme. ❑

(2.21) PROPER TRANSFORM GENERELT For enhver kurve gjennom origo vil det inverse bilde kunne dekomponeres på en tisvarende måte. Riktignok vil den eksepsjonelle fiberen ikke alltid opptre med multiplisitet én, men vil kunne ha en høyere multiplisitet. Denne faller faktisk sammen med kurvens multiplisitet i origo. Om $f(u,v)\in\mathfrak{m}$ er ligningen for kurven C minner vi om at Multiplisiteten er det største naturlige tallet n slik at $f\in\mathfrak{m}^n$. Det at vi kan utvikle f som en summen av homogene komponenter

$$f=f_n+f_{n+1}+\cdots+f_d \tag{2.3}$$

der altså termene alle er homogene polynomer i u og v, og f_i er av grad i. Tallet d er graden til f. HomKomp

ProperTrans

Lemma 2.2 *Anta at curven $C\subseteq\mathbb{C}^2$ har multiplisitet n i origo. Da kan det inverse bildet $\pi^{-1}(C)$, betraktet som en divisor på $\mathbb{BL}$, skrives som en sum*

$$\pi^{-1}C=nE+C^p,$$

der C^p er en effektiv divisor som ikke har E som komponent.

BEVIS: Vi ser først $\pi^{-1}C\cap\mathbb{BL}_U$ der alstå $U\neq 0$, og vi har relasjonen $v=uT$ der vi for enkelhets skyld setter $T=VU^{-1}$. Dette gir

$$f(u,v)=\sum_{i\geq n}f_i(u,uT)=\sum_{i\geq n}u^if_i(1,T)=u^n\sum_{i\geq n}u^{i-n}f_i(1,T).$$

Setter vi $P_U(f)=\sum_{i\geq n}u^{i-n}f_i(1,T)$, beskrives $\pi^{-1}C\cap\mathbb{BL}_U$ ved ligningen $u^nP_U(f)$. Et symmetrisk argument gir at $\pi^{-1}C\cap\mathbb{BL}_V$ beskrives av ligningen $v^nP_V(f)$ der $P_V(f)=\sum_{i\geq n}v^{i-n}f_i(T^{-1},1)$ der altså $T^{-1}=UV^{-1}$. På snittet $\pi^{-1}C\cap\mathbb{BL}_{UV}$, gjelder likhetene

$$u^if_i(1,T)=u^iT^iT^{-i}f(1,T)=v^if_i(T^{-1},1)$$

og derfor et $T^{-n}P_U(f) = P_V(f)$. Defor tilfredstiller $P_U(f)$ og $P_V(f)$ sammenlappingskravet til en divisor og definerer den effektive divisoren C^p. Det er klart at $\pi^{-1}(C) = nE + C^p$.

Siden f ikke ligger i $\mathfrak{m}^{n+1}$, forsvinner ikke samtlige koeffisienter til den ledende homogene termen f_n i origo, og følgelig forsvinner ikke *e.g.*, $P_U(f)$ identisk på E. Derfor er ikke E noen komponent i C^p. ❏

Divisoren C^p kalles for den *propre transformen* av C. Den kan også oppnås på følgende måte. Avbildningen π induserer en isomorfi mellom $\mathbb{BL} \setminus E$ og $\mathbb{C}^2 \setminus (0,0)$. Ved hjelp av denne isomorfien kan vi transportere $C \setminus (0,0)$ til $\mathbb{BL} \setminus E$, og lukker vi til bildet i $\mathbb{BL}$, finner vi den propre transformen C^p.

Fra beviset ovenfor for vi en bonus. Den propre transformen C^p er gitt ved de lokale ligningen $P_U(f)$ og $P_V(f)$. Vi har at

$$P_U(f) = \sum_i$$

$u^{n-i}f_i(1,T) = f_n(1,T) + uG(u,T)$slik at modulo u er $P_U(f)$ lik $f(1,T)$. Tilsvarende finner man at $P_V(f)$ er lik $f_n(T^{-1},1)$ modulo v. Dette betyr at snittet $C^p \cap E$ i E — som jo er lik $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ og har U og V som homogene koordiater — er gitt av polynomet $f_n(U,V)$.

Lemma 2.3 *La $C \subseteq \mathbb{C}^2$ være en kurve bestemt av polynomet $f(u,v)$. La*

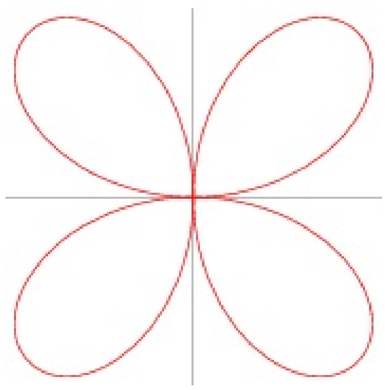
$$f = f_n + f_{n+1} + \cdots + f_d \tag{2.4}$$

være utviklinge av f i dets homogene ledd, underforstått at f_n ikke forsvinner identisk. Da er snittet $C^p \cap E$ mellom den propre transformen C^p og den eksepsjonelle fiberen E gitt ved ligningen

$$f_n(U,V) = 0$$

som undermengde av $E = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Vil man ha konkrete eksempler i tankene kan man foreksempel tenke på en *cusp* $y^2 = x^{2p+1}$, den klassike *noden* $y^2 - x^3(x+a)$ — som begge har multiplisietet to i origo — eller kanskje *quadrifolium-kurven* som er gitt ved ligningen $(x^2+y^2)^3 - (x^2-y^2)^2$ og som har et kvadruppelpunkt i origo.



La oss se på det inverse bildet $\pi^{-1}C$. I undermengden $\mathbb{BL}_U$—der altså $v = uVU^{-1}$, kan vi skrive $f_i(u,v) = f_i(u, uVU^{-1}) = u^i f(u, VU^{-1})$, og det følger at $f(u,v) = u^n f^p(u, VU^{-1})$. Tilsvarende finner vi at $f(u,v) = v^n f^p(VU^{-1}, v)$ i mengden $\mathbb{BL}^V$.

HITHIT

Definisjonen

Vi lar nå $X = \operatorname{Spec} A$ være som beskrevet, *i.e.,* et noethersk, affint skjema som er regulær av dimensjon to. Et lukket punkt $x \in X$ er gitt og tilsvarer det maksimale idealet $\mathfrak{m}$ i A. Restklassekroppen $k(x) = A/\mathfrak{m}$ betegner vi med k. Vi skal gi en definisjon og en relativt presis beskrivelse av oppblåsningen av X i x. Definisjonen er funktoriell og koordinatuavhengig (og almengyldig), men i beskrivelsen bruker vi et generatorsystem for $\mathfrak{m}$ med to elementer (og således er beskrivelsen spesifikk for vår situasjon).

(2.22) Den funktorielle og koordinatefrie definisjonen er som følger. Vi ser på A-modulen $\bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i$. Det er en gradert A-algebra. De homogene elementene av grad i er presis de som ligger i summanden $\mathfrak{m}^i$; og om $a \in \mathfrak{m}^i$ og $b \in \mathfrak{m}^j$ så er selvsagt $ab \in \mathfrak{m}^{i+j}$. Utvider vi ved linearitet, ser vi at $\bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i$ er en gradert ring. Ringen A er innehold i $\bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i$ som underringen av elementer av grad null, *i.e.,* som summanden $\mathfrak{m}^0$.

Vi lar $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i$. Inklusjonsavbildningen $A \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i$ induserer en avbildning $\pi\colon \widetilde{X} \to X = \operatorname{Spec} A$. Skjemaet $\widetilde{X}$ kalles for *oppblåsningen* av X i x og π bærer navnen *projeksjonen* eller *oppblåsningsavbildningen*. Kjært barn har mange navn; den kalles også for en *monoidal transformasjon* eller også for en *dilatasjon*.

(2.23) Denne definisjonen er et spesialtilfellet av en svært generell definisjon. Om $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ er et koherent ideal på et vilkårlig skjema X, så er oppblåsningen av $\mathcal{I}$ gitt som $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} \bigoplus_{i\geq 0} \mathcal{I}^i$. Idealet $\mathcal{I}$ kan vært svært komplisert å beskrive, så $\widetilde{X}$ er tilgjengelig for en god beskrivelse kun i spesielle tilfeller (dog vesentlig mere generelle enn i vårt avsnitt her).

(2.24) Anta nå at $\mathfrak{m}$ er generert av de to elementene u og v. Vi introduserer to variable U og V og gir polynomringen $A[U,V]$ den vanlige graderingen, altså den som er slik at U og V er av grad én og elementene i A av grad null. Vi definerer en ringavbildning homogen av grad null

$$A[U,V] \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i$$

ved å sende et homogent polynom $F(U,V)$ av grad n på $F(u,v)$ betraktet som element i summanden $\mathfrak{m}^n$, for dertter å utvide ved linearitet. Dette er opplagt en en additiv avbildningen som også er en A-modul homomorfi, og det er en enkelt sak å verifisere at den tar produkter på produkter. Siden u og v genererer idealet $\mathfrak{m}$, er avbildningen nærmest per definsjon en surjeksjon.

Elementet $uV - vU$ ligger i kjernen til denne avbildningen, og at det faktisk er en generator for kjernen følger umiddelbart fra følgende tilpassede versjon av polynomdivisjon:

Lemma 2.4 *La A være en ring og u og v to elementer i A. (Anta at u ikke er nilpotent.) Anta at $F(U,V) \in A[U,V]$ er et homogent polynom. Vi kan skrive*

$$u^n F(U,V) = (uV - vU)G(U,V) + U^n u^n r$$

der $r \in A$ og $G(U,V)$ er et homogent polynom av grad $n-1$.

Bevis: La $T = VU^{-1}$, og $P(T) = F(U,V)U^{-n}$. Da er $P(T)$ av grad n. Polynomdivisjon i ringen $A_u[T]$ git

$$P(T) = (T - vu^{-1})Q(T) + r$$

der $r \in A_u$ og $Q(T) \in A_u[T]$ er av grad $n-1$. Multipliserer vi med U^n og klarerer nevnerne i r og $Q(T)$ — de er alle potenser av u med eksponenter som ikke overstiger henholdsvis n og $n-1$ — finner vi

$$u^n F(U,V) = u^n U^n P(T) = (uV - vU)G(U,V) + U^n u^n r.$$

❑

Nå er $\operatorname{Proj} A[U,V]$ isomorf med den projektive linjen $\mathbb{P}^1_A$ over $\operatorname{Spec} A$, og ved hjelp av lemmaet identifiserer vi oppblåsningen $\widetilde{X}$ med det lukkede underskjemaet gitt ved ligningen $uV - vU = 0$; oppsummert:

Setning 2.1 *La $X = \operatorname{Spec} A$ der A er et to-dimensjonalt integritetsområde. La $x \in X$ være et lukket punkt som er et regulært punkt på X og la $\mathfrak{m}$ være det korresponderende maksimale idealet. Anta at $\mathfrak{m}$ er generert av to elementer. Vi kan identifisere oppblåsningen $\widetilde{X}$ av X i x med det lukkede underskjemaet $V(uV - vU) \subseteq \mathbb{P}^1_A$. Med andre ord, vi har diagrammet*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^1_A \arrow[dl, "pr"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

der π er oppblåsningsavbildningen og pr projeksjonen.

Fibren til π over et punkt $y \in X$ med maksimalt ideal $\mathfrak{m}_y$ er et lukket underskjema av $\mathbb{P}^1_{k(y)}$, som jo fiberen til pr over y. Den er gitt ved ligningen $u_0V - v_0U$ der u_0 og v_0 er verdiene u og v tar i $k(y) = A/\mathfrak{m}_y$. Dersom $y = x$ er denne ligningen identisk lik null, og fiberen er lik $\mathbb{P}^1_{k(x)}$. I alle andre punkter er minst et av elementene u og v forskjellig fra null, og det følger at fiberen $\pi^{-1}(y)$ skjemateoretisk betsår aa ett punkt; *i.e.,* er lik $\operatorname{Spec} k(y)$.

Korollar 2.1 *π er en isomorpfi uten for x*

Bevis: Siden π per konstruksjon er projektiv, er $\mathcal{O}_{\widetilde{X},y'}$ endelig over $\mathcal{O}_{X,y}$, men $\mathcal{O}_X$ ❑

(2.25) Vi skal etterhvert etablere følgende egenskaper ved oppblåsningen. I tillegg skal vi gi en detaljert beskrivelse av oppblåsningsavbildningen som er nødvendig i dypere analyse.

- ☐ Oppblåsningen $\widetilde{X}$ er et irredusibelt og redusert noethersk skjema av dimensjon to. Det er regulært langs den eksepsjonelle fiberen $E = \pi^{-1}(x)$

- ☐ Oppblåsningsavbildningen π er en projektiv, birasjonal avbildning. Restriksjonen dens induserer en isomorfi $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(x) \to X \setminus \{x\}$

- ☐ Fiberen $\pi^{-1}(x) = E$ er en effektiv Cartier-divisor på $\widetilde{X}$ og oppblåsningsavbildningen er universell med hensyn på dett. det betyr at hvergamg $\psi\colon Y \to X$ er en avbildning slik at $\psi^{-1}(x)$ er en Cartier divisor (*i.e.*, $\psi^*\mathfrak{m}$ er en invertibel $\mathcal{O}_Y$-modul), så faktoriserer ψ på en entydig måte gjenom π.

- ☐ Den eksepsjonelle fobere E er isomorf med den projektive linjen $\mathbb{P}^1_{k(x)}$. Vi har at $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)|^E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k(x)}}(-1)$.

(2.26) På den projektive linjen $\mathbb{P}^1_A$ over X velger vi homogene koordianeter U og V; det betyr f.eks at vi lar $\mathbb{P}^1_A = \operatorname{Proj} A[U, V]$. Polynomet $uV - vU$ er homogent i U og V og definerer derfor et underskjema $\widetilde{X} \subseteq \mathbb{P}^1_A$. Det avbildes kanonisk på X via restriksjonen av projeksjonen $\mathbb{P}^1_A \to X$. Den avbildningen betegner vi med π, og vi har således følgende tegning

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{P}^1_A \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

der alstå $\widetilde{X}$ er det lukkete underskjemaet gitt ved ligningen $uV - vU = 0$.

(2.27) STANDARDOVERDEKNINGEN Den projektive linjen har en åpen affin overdekning betsående av de to åpne mengdene $D_+(U)$ og $D_+(V)$. Punktene i $D_+(U)$ er de punktene der koordinaten U ikke forsvinner (presist uttrykt: de homogene primidealene i $A[U, V]$ som ikke inneholder U), mens $D_+(V)$ er de der V ikke forsvinner. StandardOverdekn

Vi skal stadig vekk ha med funksjonenen VU^{-1} og UV^{-1} å gjøre, så vi gir dem egne navn og setter $T = VU^{-1}$. Da er $UV^{-1} = T^{-1}$. Det gjelder at $D_+(U) = \operatorname{Spec} A[VU^{-1}] = \operatorname{Spec} A[T]$, og ditto, er $D_+(V) = \operatorname{Spec} A[T^{-1}]$, der vi naturligvis behandler T^{-1} som en egen variabel som vi stundom skal betegne med S. Snittet $D_+(U) \cap D_+(V)$ er lik $\operatorname{Spec} A[T, T^{-1}]$.

Restriksjonene av oppblåsningsavbildningen π til de diverse åpne undermengdene vi har beskrevet, er alle insudert av inklusjone av A i de korresponderenede polynomringene.

(2.28) Snittet $\widetilde{X} \cap D_+(U)$ betegnes med $\widetilde{X}_U$, og ditto er $\widetilde{X}_V \widetilde{X} \cap D_+(U))$. Vi skal gjøre en grundig analyse av projeksjonen π restriktert til X_U som vi betegner med π_U. I diagrammet nedenfor har vi indikert π_U og den korresponderenede avbildning $\pi_U^\sharp$ mellom koordinatringene ved siden av hverandre:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_U & \qquad & A[T]/(v-uT) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_U} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \pi_U^\sharp} \\ X & & A \end{array}$$

Avbildningen $\pi_U^\sharp$ er ingen annen den som er indusert av inklusjonen av A i polynomringen $A[T]$. Bytter vi om rollene til u og v og U og V får vi en identisk beskrivelse av restriksjonen $\widetilde{X}_V \to X$.

(2.29) For enkelhets skyld lat vi $B = A[T]/(v - uT)$, og vi starter med å ae på idealet $\mathfrak{m}B = (u, v)B$. I B gjelder jo likheten $v = uT$ slik at $\mathfrak{m}B = (u, uT)B = (u)B$. Nå definerer $\mathfrak{m}B$ den skjemateoretiske fiberen $\pi_U^{-1}(x)$. Tar vi symmetrien mellom $\widetilde{X}_U$ og $\widetilde{X}_V$ i betraktning, har vi dermed at E er en effektiv Cartier-divisor som er gitt ved ligningen $u = 0$ i $\widetilde{X}_U$ og ved ligningen $v = 0$ i $\widetilde{X}_V$.

For kvotienten $B/\mathfrak{m}B$ gjelder det at

$$B/\mathfrak{m}B = A[T]/(v - uT, u) = A[T]/(u, v) = k[T]$$

så den er en polynomring i en variabel over restklassekroppen k. Den tilsvarende regenstykket med $\widetilde{X}_V$ gir at $B_V/\mathfrak{m}B_V = k[T^{-1}]$, og på snittet finner vi $k[T, T^{-1}]$. Derfor er $E = \mathbb{P}^1_A$.

Dette er også klart siden allerede fiberen til den kanoniske projeksjonen $pr\colon \mathbb{P}^1_A \to X$ over x er lik $\mathbb{P}^1_{k(x)}$

Vi har dermed vist at $E = \mathbb{P}^1_{k(x)}$.

(2.30) Den åpne undermengden $\widetilde{X}_U = \operatorname{Spec} B$ er regulært i alle punkter langs E. Om $\mathfrak{n} \subseteq B$ er et maksiamlt ideal tilsvarende et punkt i E, har vi at $u \in \mathfrak{n}$. Siden $B/uB = k[T]$ og $k[T]$ er et entydig-faktoriserings-område kan vi finne et polynom $f(T)$ i $B[T]$ som er irredusibelt modulo u og slik at u og $f(T)$ genererer $\mathfrak{n}$. Det følger at $B_\mathfrak{n}$ er en regulær, lokal ring (den er av dimensjon to og det maksimale idealet er generet av to elementer).

Vi starter med å studere π_U over den åpne undermengden $D := D(u) = \operatorname{Spec} A_u \subseteq X$ der u ikke forsvinner, og vi skal se at den her induserer en isomorfi, *i.e.*, restriksjonen av π_U er en isomorfi mellom $\pi_U^{-1}D$ og D.

For å verifisere dette ser vi på koordinatringene. Koordinatringen til D er lokaliseringen A_u, og over denne ligger $A_u[S]/(v - uS)$. Men i den siste ringen er jo $S = vu^{-1}$, og derfor gjelder det at $A_u[S]/(v - uS) = A_u$, som er presis det vi trenger for å konkludere med at lokalisering av $\pi_U^\sharp$ i u er en isomorfi. Situasjone er fullstendig symmetrisk i u og v, og vi har dermed vist:

Setning 2.2 *Avbildninge π er birasjonal. Mere presist, den induserer en isomorfi mellom $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(x)$ og $X \setminus \{x\}$.*

Hva skjer over v-aksen i X, altså over de punktene i X der u forsvinner? Et slik punkt tilsvarer et primideal $\mathfrak{p}$ i $A[S]/v-uS$ som inneholder u. Da er klart også $v \in \mathfrak{p}$ slik at $(u,v) \subseteq \mathfrak{p}$, og slike primidealer står i én-én-tydig sammenheng med primidelaene i polynomringen $k[S]$. Polynomringen er et entydig faktoriseringsområde, så et primideal der som er forskjellig fra nullidealet, er generert av ett irredusibelt polynom. Det betyr at $\mathfrak{p} = (u, f(S))$ der $f(S)$ er et polynom som er irredusibelt i $k[S]$.

- □ Skjemaet $\widetilde{X}_U$ er et regulært skjema.
- □ Den skjemateoretiske fiberen $\pi_U^{-1}(x)$ over punktet x er gitt som $u = 0$ og er isomorf med $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[S]$.
- □ Restriksjonen av π_U til $\pi_U^1 D$ er en isomorfi mellom $\pi_U^{-1} D$ og D.

Den første påstanden er den eneste som kunne trenge et videre argument. En lokal, noetehersk ring av Krull-dimensjon to er regulær presis dersom det maksimale idealet er generet av *to* elementer, og vi sjekket jo at maksimalidealene i fibren til π_U over x alle er på formen $(u, f(S))$, altså generet av to elementer. De andre punktene i $\widetilde{X}_U$ er også regulære siden π der er en isomorfi, og X per hypotese er regulær.

(2.31) For den åpne mengde $D_+(V)$ og $\widetilde{N}_V$ gjelder selvsagt hel analoge utsagn, som de i forrige paragraf for $D_+(V)$ og $\widetilde{X}_V$. Siden de danner en overdekning får vi umiddelbart

- □ Oppblåsningen $\widetilde{X}$ er en glatt flate.

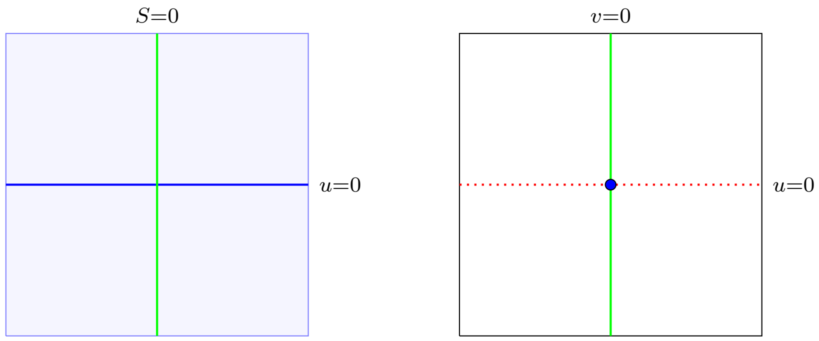
Vi lar E være Den skjemateoretiske fiberen til π over x. Den er ettr vi så gitt som $u = 0$ i $\widetilde{X}_V$ og som $v = 0$ i $\widetilde{X}_V$ — på snittet mellom de to gjelder relasjonen $u = Sv$ og S er invertibel på snittet. De definerer derfor en divisor som vi betegner med E og kallwer *den eksepsjonelle divisoren*. Det tilsvarende invertible knippet er $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)$.

Setning 2.3 *Oppblåsningen $\widetilde{X}$ er en glatt flate. Det inversebildet $\pi^{-1}\{x\}$ er en divisor på $\widetilde{X}$ som er isomorf med $\mathbb{P}^1_k$. Det invertible knippet $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)$ tilfredstiller $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)|E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1)$. Avbildningen π er en isomorfi på $\widetilde{X} \setminus E$ og $X \setminus \{x\}$.*

(2.32) Man blir muliges noe klokere av åÅpå tenke gjennom denne situasjonen i tilfellet da $A = k[u,v]$ og k er en algebraisk lukket kropp. I såfall gjelder selvfølgelig likheten $k[u,v,S]/(v - uS) = k[u,S]$, og den åpne mengden $\widetilde{X}_U$ er ikke annet enn det affine planet $\mathbb{A}^2_k$ utstyrt med koordinatene u og S, mens X jo er det affine planet $\mathbb{A}^2_k$ med koordinater u og v.

Avbildningen π sender et punkt (u,S) til punktet $(u,v) = (u,uS)$. Det er lett å innse at hele S-aksen i $\mathbb{A}^2_k$, som altså er gitt ved $u = 0$, sendes til origo, og således er det inverse bildet til $(0,0)$ lik S-aksen. På mengden $D \subseteq X$, som er komplementet til v-aksen, er koordinaten S entydig bestemt av punktet (u,v), den er nemlig gitt ved $S = vu^{-1}$.

(2.33) Tilfellet $A = \mathbb{Z}[u]$ og $\mathfrak{m} = (p, u)$ er vesentlig mindre intuitivt. I det fillet er $\widetilde{X}_U$ ikke en ny kopi av $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[v]$ men ringen $\mathbb{Z}[u, S]/(p - uS)$ som ikke er isomrf med $\mathbb{Z}[u]$ (p splitter jo som et ikketrivielt produkt). Dersom q er et primtall forskjellig fra p blir fiberen over q "hyperbelen" $us = p$ i $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_q}$ og over p degenererer hyperbelen til aksekorset $uS = 0$. Hyperblene har vi også i tilfellet over k, det som er nytt er de lever over forskjellife kropper.



(2.34)

Setning 2.4 *Avbildningen π er en isomorfi utenfor E;*

Avbildniger inn i projektive rom

Vi skal i dette avsnittet se nærmere på hva det vil siå avbilde et skjema X over $\operatorname{Spec} A$ inn i et projektivt rom $\mathbb{P}^n_A$. Med andre ord skal vi beskrive funktoren $Sch\mathsf{Sch}_\mathsf{A} \to \mathsf{Set}$ gitt ved $X \to \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sch}_\mathsf{A}}(X, \mathbb{P}^n_A)$.

Vi velger homogene koordinater $x_0, \ldots, x_n$ på det projektive rommer $P = \mathbb{P}^n_A$ slik at $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$. Graderingen i $A[x_0 \ldots, X_n]$ er den opplagte med konstantene i A som elementene av grad null og de variable x_i alle av grad én. Det projektive rommet P har en åpen overdekning $\{U_i\}$ med $U_i = D_+(x_i)$ som består av de homogene primidealene i $A[x_0, \ldots, x_n]$ som ikke inneholder x_i (og ei heller det irrelevante idealet $(x_0, .., x_n)$).

Det viktigse i denne sammenhengen er det invertible knippet $\mathcal{O}_P(1)$. De variable x_i er alle globale seksjoner av $\mathcal{O}_P(1)$, og de er genererende. Det vil si at i hvert punkt i P er minst en av dem forskjellig fra null. Mer spesifikt, per definisjon forsvinner jo x_i ikke i noe punkt i $U_i = D_+(x_i)$. Vi har altså en surjektiv avbildning

$$\mathcal{O}_P^n \to \mathcal{O}_P(1) \to 0.$$

(2.35) Anta nå at X er et skjema over A og at $\phi \colon X \to P$ er en avbildning i Sch_A. Vi kan trekke $\mathcal{O}_P(1)$ tilbake til X med ϕ og slik få et invertibel $\mathcal{O}_X$-modul $L = \phi^*\mathcal{O}_P(1)$ på X. De globale seksjonene x_i av $\mathcal{O}_P(1)$ kan likeledes trekkes tilbake, og de gir dermed opphav til globale seksjoner $\sigma_i = \phi^* x_i$. Siden surjeksjoner trekkes tilbake til surjeksjoner, er σ_i-ene genererende seksjoner for L.

Det motsatte gjelder også:

Setning 2.5 *La X være et noethersk skjema over A og L en invertibel $\mathcal{O}_X$-modul. Anta at $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ er globale, genererende seksjoner i L. Da finnes en entydig avbildning $\phi\colon X \to P = \mathbb{P}^n_A$ slik at $\phi^*\mathcal{O}_P(1) = L$ og $\phi^* x_i = \sigma_i$*

BEVIS: For hver indeks i mellokm 0 og n lar vi $V_i = \{\, x \in X \mid \sigma_i(x) \notin \mathfrak{p}_x L \,\}$, som intuitivt kan beskrives som mengden der σ_i ikke forsvinner. Det er en åpen mengde, og over V_i er σ_i en trivialiserende generator for L. Det vil si vi har en isomorfi $\sigma_i^{-1}\colon L|_{V_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ som oppfyller $\sigma_i^{-1}(\sigma)\sigma_i = \sigma$ for alle seksjoner σ av L over åpne umdermengder av V_i.

Det betyr at vi har en avbildning $A[x_j x_i^{-1}\colon 0 \leq j \leq n] \to \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ ved å sende $x_j x_i^{-1}$ på $\sigma_i^{-1}(\sigma_j)$. Den universelle egenskapen for globalseksjoner, gir oss en indusert avbildning $\phi_i\colon V_i \to D_+(x_i) = \operatorname{Spec} A[x_\bullet x_i^{-1}]$, og denne oppfyller $\phi_i^* x_j x_i = \sigma_i^{-1}(\sigma_j)$.

Det gjenstår å se at ϕ_i-enen stemmer overens på snittene $V_{ij} = V_i \cap V_j$, men det følger umiddelbart siden vi har ligningene

$$\sigma_j^{-1}(\sigma_k)\sigma_i^{-1}(\sigma_j)\sigma_i = \sigma_j^{-1}(\sigma_k)\sigma_j = \sigma_k = \sigma_i^{-1}(\sigma_k)\sigma_i$$

$$\sigma_i^{-1}(\sigma_j)\sigma_i = \sigma_j$$
$$\sigma_j^{-1}(\sigma_i)\sigma_j = \sigma_i$$

medfører at

$$\sigma_i^{-1}(\sigma_j) \cdot \sigma_j^{-1}(\sigma_i) = 1.$$

❑