1. Del

Skjæringsteori

Intro

Warning: En svært midlertidig versjon som er ikke er ferdig. Den er rotete og sikkert full av feil. Forbedring følger etterhvert!
versjon 0.3 — last update: 10/20/15 12:48:03 PM 9:13:51 AM

Vi skal i dette avsnittet utvikle skjæringsteori for flater, og i tråd med vår vanlige praksis tilstreber vi maksimal generalitet. Allikevel skal vi begrense oss til en snittteori for Cartier-divisorer noe som forenkler vesentlig uten at vi mister mye i anvendelsene våre.

En god skjæringsteori betinger at prinsippet om "antallenes permanens" er gyldig slik at skjæringstall kan beregnes ved å bevege de involverte divisorene. Med litt dyktighet (og flaks) kan en komplisert og tilsynelatende uberegnbar situasjon deformeres over i en annen og enklere der skjæringstallene kan beregnes. For at prinsippet om "antallenes permanens" skal gjelde, er properhet en betingelse. Hvis ikke, kan vi riskerer at skjæringspunkter fortapes i det uendelige når divisorene beveges, og dermed forsvinner fra skjæringsregnskapet.

(1.1) For å ha den nødvendige properheten skal vi anta at flaten X kommer utstyrt med en *proper* avbildning $\phi\colon X \to S$ der S er et skjema av passende type (noethersk, redusert og irresusibelt), og det er ingen stor begrensning at vi antar at dimensjonen er høyst to. Vi skal ha utpekt lukket punkt $y \in S$, og divisorene vi skal se på skal alle ha støtte i denne fiberen, og deres underliggende kurver er dermed propre over kroppen $k(y)$.

- □ Dersom $S = \operatorname{Spec} k$ er spekteret av en kropp, arbeider vi altså med en komplett flate over k. Det er ingen begrensning på hvilke Cartier-divisorer vi ser på. I dette tilfellet er den tradisjonelle kategorien av komplette, komplekse flater inkludert.

- ☐ Dersom $\dim S = 1$, er ϕ en fibrasjon. Vi skal anta at ϕ er dominerende, og at S er noethersk, redusert og irrediusibelt, men punktet $y \in S$ skal være et *regulært* punkt på S. Da er den lokale ringen $\mathcal{O}_{S,y}$ en diskret valuasjonsring, og det maksimale idelaet $\mathfrak{m}_y$ er et hovedideal. Følgelig er fiberen $E = \phi^{-1}(s)$ en Cartier-divisor på X med tilbaketrekningen av en generator for $\mathfrak{m}_y$ som ligning.

- ☐ Dersom $\dim S = 2$, er S en flate som vi skal anta er noethersk, redusert og irredusibel, men i dette tilfellet åpner vi opp for at punktet y også er et singulært punkt på S. Vi skal anta at ϕ er birasjonal og at E er en eksepsjonell fiber, det vil si en kurve som kollapses til punktet y.

(1.2) Vi trenger også hypoteser på X i de punktene vi skal arbeide med. Terorien vi utvikler bygger på hva vi gjorde for kurver, så vi må ha en garanti for at Cartier-divisorer

Flaten X skal vær som før, men i tillegg skal vi anta at X er Cohen-Macaulay, noe som er oppfylt dersom X er en normal flate.

At X Cohen-Macaulay betyr at alle de lokale ringene $\mathcal{O}_{X,x}$ er av maksimal dybde, det vil si at dybden er lik $\dim \mathcal{O}_{X,x}$. Særlig viktig for oss er det at om f og g er to elementer i det maksimale idealet til en lokal Cohen-Macaulay ring A slik at $A/(f,g)$ er av endelig lengde, så danner de en *regulær sekvens*. Der betyr, i tilegg til at hverken f eller g er nulldivisorer i A, at f ikke er en nulldivisor i A/g, og *vice versa*, at g ikke er en nulldivisor i A/f. En annen følge av at f og g er en regulær sekvens, som vi skal bruke et par ganger, er at Koszul-komplekset

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A^2 \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow A/(f,g) \longrightarrow 0$$

er eksakt. Avbildningene α og β er gitt ved at $\alpha(a) = (ga, -fa)$ og $\beta(a,b) = af + bg$. Det er opplagt at sammensetningen $\beta \circ \alpha = 0$, mens kompleksets ekaskthet er ekvivalent med at f og g danner en regulær sekvens.

Lokale skjæringstall

Vi begynner med noen generelle refleksjoner over hvordan man kan definere snittallet mellom to effektive Cartier-divisorer C og D på en flate X som snitter propert. Det er en helt lokal definisjon i punktene i $C \cap D$; ingen bevegelser av divisorer i divisorklasser, så den enest hypotesen som kreves (i og for seg ikke for definisjonen, men for lemmaet 1.1 om additivitet) er at de lokale ringene $\mathcal{O}_{X,x}$ er Cohen-Macauley i skjæringspunktene. Dersom X er en normal flate er dette oppfylt, for ikke snakke om om X er regulær.

At de to divisorene snitter *propert* i x, betyr at eventuelle felles komponenter som de måtte ha, ikke går igjennom x. I et algebraisk språk lyder dette slik. Om f og g er lokale ligninger for henholdsvis C og D omkring x, så er $I = (f,g)$ i $\mathcal{O}_{X,x}$ et i $\mathfrak{m}$-primært ideal (der $\mathfrak{m}$ som vanlig betegner det maksimale idealet til $\mathcal{O}_{X,x}$). Kvotienten $\mathcal{O}_{X,x}/(f,g)$ er en ring av dimensjon null og derfor av endelig lengde, og det *lokale snittallet* i x mellom

C og D er ikke annet enn dennes lengde:

$$(C, D)_x = \operatorname{length} \mathcal{O}_{X,x}/(f, g).$$

Dette er vulgær-versjon av snittallet, men den eneste man disponerer generelt. Arbeider man med skjemaer av essentielt endelig type over en kropp vil $[k(x) : k](C, D)_x$ være et bedre alternativ. Det er denne definisjon, eller variasjoner over denne, som gir utsikter til dypere teoremer.

Lemma 1.1 *Anta at X er en flate og at $x \in X$ er et lukket punkt slik at $\mathcal{O}_{X,x}$ er Cohen-Macauley. Dersom C, C' og D er tre Cartier-divisorer på X slik at både C og C' snitter D propert i x, så er* additivitet

$$(C + C', D)_x = (C, D)_x + (C', D)_x$$

BEVIS: For å forenkel notasjonen lar vi $A = \mathcal{O}_{X,x}$. De lokale ligningene for C, C' og D betegner vi henholdsvis med f, f' og g. En lokal ligning for $C + C'$ er da per definisjon produktet ff'.

Beviset er i boks med engang vi har etablert at følgende følge er korteksakt:

$$0 \longrightarrow A/(f, g) \xrightarrow{\alpha} A/(ff', g) \xrightarrow{\beta} A/(f', g) \longrightarrow 0 \qquad (1.1)$$

der β er kvotientavbildningen, og avbildningen α sender en restklasse $[a]$ mod (f, g) til restklassen $[f'a]$ mod (ff', g). EksFoelge

Med unntak av at α er injektiv, er det lett å se at følgen 1.1 er eksaskt; det krever et argument. Så anta at $f'a = bff' + cg$ med $b, c \in A$. Det gir $f'(a - bf) = cg$. Nå er A per hypotesde en Cohen-Macauley-ring, og f' og g danner er parametersystem (*i.e.*, idealet (f', g) er $\mathfrak{m}$-primært). En av de gode egenskapene til lokale Cohen-Macauley-ringer er at parametersystemer automatisk er regulære følger, som i vår sammenheng betyr at f', g er en regulær følge. Spesielt er f' ikke en nulldivisor i $A/(g)$, og det følger fra ligningen $f'(a - bf) = cg$ at $a - bf = c'g$, og $a \in (f, g)$. ❑

(1.3) Da vi studerte kurver og divisorer på dem, ga vi en lignende definisjon av *graden* til en divisor. Om D er en effektiv Cartier-divisor på kurven C over kroppen k, så lot vi $\deg_k D = \sum_{x \in E} [k(x) : k] \operatorname{length} \mathcal{O}_{C,x}/(f_x)$ der f_x betegner en lokal ligning for Cartier-divisoren D omkring x. Leddene vi summerer opp er ikke annet enn $\operatorname{length}_k \mathcal{O}_{C,x}/(f_x)$, og summen er selvsagt endelig; det er kun endelig mange punkter der f_x ikke er en enhet. Om C er proper over k, gjelder Riemann-Roch-teoremet, og den enkle Riemann-Roch-formelen forteller oss at

$$\chi(\mathcal{O}_C(D)) - \chi(\mathcal{O}_C) = \deg_k D.$$

Uten faktorene $[k(x) : k]$ ville vi ikke hatt et slikt resultat, så dette er god illustrasjon av hvorfor den er viktig.

(1.4) Den enkle Riemann-Roch-formelen kan uten videre vanskeligheter utledes i en noe mer generell situasjon enn den beskrevet ovenfor. Den gjelder også om C er en proper kurve over en artinsk lokal ring A — en naturlig hypotese er at C er proper over $A = H^0(C, \mathcal{O}_C)$. Det gamle beviset går gjennom *mutatis mutandis*. Kohomologigruppene $H^i(C, F)$ til et koherente knipper F vil alle være endelige moduler over A. Derfor er de av endelig lengde over A slik at Euler-karakteristikken $\chi(F) = \operatorname{length}_A H^0(F) - \operatorname{length}_A H^1(F)$ har mening, og den er selvsagt additiv over korteksakte følger av koherente $\mathcal{O}_C$-moduler.

Argumentet vi ga i xxx for at enhver Cartier-divisor er lineært ekvivalent til differensen mellom to effektive, går uforandret gjennom, og om D er effektiv, lar vi graden til D være

$$\deg_A D = \sum_{y \in D} \operatorname{length}_A \mathcal{O}_{D,y}.$$

Med disse ingrediensene på plass følger den enkle delen av Riemann-Roch som før. Spesielt er $\deg_A D$ kun avhengig av divisorklassen som D ligger i; *i.e.*, graden $\deg_A D$ avhenger kun av det invertible knippet $\mathcal{O}_C(D)$.

Vi bemerker at om A er en algebra av endelig type over kroppen k, så er $\deg_k D = [K : k] \deg_A D$, der K betegner restklassekroppen til A. Det er også slik at om C også er en kurve over en kvotient A' av A, så er $\deg_A D = \deg_{A'} D$ — for enhver A'-modul av endelig lengde gjelder det jo at $\operatorname{length}_{A'} M = \operatorname{length}_A M$.

(1.5) Vi beveger oss noe ut av den lokale situasjonen, og antar at C er proper kurve over en artinsk ring A. Flaten X skal være Cohen-Macauley — iallefall i punkter på C — mens D er en vilkårlig effektiv Cartier-divisor på X.

Restriksjonen av Cartier-divisoren D til C er en Cartier-divisor på C (siden X er Cohen-Macauley) og vi definerte graden

$$\deg_A D|_C = \sum_x \operatorname{length}_A \mathcal{O}_{C,x}/g_x$$

der g_x er lokale ligninger for D, men om f_x er lokale ligninger for C, gjelder det jo at $\mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_{X,x}/f_x$ slk at $\mathcal{O}_{C,x}/g_x = \mathcal{O}_{X,x}/(f_x, g_x)$, og vi konkluderer med at

$$\deg_A D|_C = \sum_x (C, D)_x$$

som sammen med foreklet Riemann-Roch gir

$$\chi(\mathcal{O}_C(D)) - \chi(\mathcal{O}_C) = \sum_x (C, D)_x.$$

Spesielt er $\sum_x (C, D)_x$ ikke avhengig av annet enn divisorklassen til C. Vi har dered bevist følgende permanens

Setning 1.1 *Anta at X er Cohen-Macaulye og at $C \subseteq X$ er en effektiv Cartier-divisor som er proper over $H^0(C, \mathcal{O}_C)$. Dersom D og D' er to effektive, lineært ekvivalente Cartier-divisorer på X, så har vi*

$$\sum_{x \in C} (D, C)_x = \sum_{x \in C} (D', C)_x.$$

Skjæring av to Cartier-divisorer

Anta nå at X er en kvasiprojektiv flate og anta at $E \subseteq X$ er en Cartier-divisor som er proper over $H^0(E, \mathcal{O}_E)$. En realiserng av en slik situasjon er for eksempel om E fiberen til en proper avbildning $\phi \colon X \to Y$ over et lukket punkte $y \in Y$ der Y er som i starten på avsnittet. Er Y en kurve og y et regulært åunkt, så er automatisk E en Cartier-divisor, men om $\dim Y = 2$ må vi anta dette; *e.g.,* at X er regulær langs E.

Vi lar $\operatorname{div}_E X$ betegne undergruppen av divisorklassegruppen til X generert av klassene til Cartier-divisorer med støtte i E.

Vi skal nå se på situasjonen der C og D er to effektive Cartier divisorer på X med støtte langs E, og som snitter propert. Siden de har støtte langs E, er de begge definert over en den artinske ringen $A = \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^n$ for et tilstrekkelig stort naturlig tall n.

Lemma 1.2

$$\deg_A \mathcal{O}_X(C)|_D = \deg_A \mathcal{O}_X(D)|_C \tag{1.2}$$

DegLike

BEVIS: På C er $C \cap D$ nullpunktene til en seksjon av restriksjonen $\mathcal{O}_X(D)|_C$, og på D nullpunktene for en seksjon av det invertible knippet $\mathcal{O}_X(C)|_D$. Det følger at

$$\deg_k \mathcal{O}_X(C)|_D = \sum [k(y) : k] \operatorname{length} \mathcal{O}_{C \cap D, y} = \deg_k \mathcal{O}_X(C)|_C.$$

❑

Vi lar (C, D) betegne den felles verdien i likheten i lemma. Forløpig er denne definisjonen begrenset til tilfellene der både C og D er *effektive* Cartier-divisorer, men vi skal ganske snart utvide den til å gjelde alle. Vi bemerker at skjæringstallet (C, D) kun avhenger av divisorklassene til C og D, og at det er symmetrisk i C og D. Det er også additivt i begge variablene siden jo graden til en divisor på en kurve avhenger additivt av divisoren.

Lemma 1.3 *Anta at X kvasiprojektiv. Da er enhver Cartier-divisor lineært ekvivalent med en differens mellom to effektive divisor. De to effektive kan velges så de skjærer en tredje gitt divisor propert.*

BEVIS: La L være et veldig ampelt knippe på X, og la C være en Cartier-divisor på X. Nå er både L^n og $L^n(C)$ generet av sine seksjoner bare vi velger n tilstrekkelig stor, og vi lar H_1 og H_2 betegne de effektive divisoren tilordnet en seksjon av henholdsvis L^n og $L^n(C)$. Da er $C + H_1 \equiv H_2$, og følgelig er $C \equiv H_2 - H_1$.

Anta så at D er en annen effektiv Cartier-divisor. Vi skal argumenter for at divisorene H_1 og H_2 kan velges så de ikke har noen felles komponent med D. Nå er L et ampelt knippe slik at at for enhver komponent F i D så vil $L^n|_F$ og $L^n(C)|_F$ være generert av sine globalseksjoner bare n er tildtrekkelig stor. For store n har vi også annulasjonene

$$H^1(L^n(-F)) = H^1(L^n(C - F)) = 0,$$

og følgelig er de to restriksjonsavbildningene

$$H^0(L^n) \to H^0(L^n|_F) \text{ og } H^0(L^n(C)) \to H^0(L^n(C)|_F)$$

begge surjektive. Da er det klart at vi kan finne definerende seksjoner for H_1 og H_2 som ikke forsvinner langs noen komponent F. ❑

Anta nå at C og D er to Cartier-divisorer på X. Vi skriver hver av dem som en differens av to effektive: $C \equiv H_1 - H_2$ og $D \equiv G_1 - G_2$. Vi definere så

$$(C, D) = (H_1, G_1) - (H_1, G_2) - (H_2, G_1) + (H_2, G_2), \tag{1.3}$$

DefSnittform

som presis er uttrykket mål ha for at (C, D) skal være biadditiv. Venstre siden i 1.3 er uavhengig av hvilke resprentasjoner av C og D som en differens av effektive Cartier-divisorer vi bruker, for om $H_1 - H_2 \equiv H_1' - H_2'$ så er $H_1 + H_2' \equiv H_1' + H_2$, og følgelig er

$$(H_1 + H_2', G) = (H_1' + H_2, G)$$

for en hver effektiv G. Dette nedfører at

$$(H_1, G) - (H_2, G) = (H_1', G) - (H_2', G),$$

og setter vi $G = G_1$ og $G = G_2$ og subtraherer, finner vi at de to høyre sidene i 1.3 faller sammen, og (C, D) er uavhengig av representasjonen av C. Ved symmetri er (C, D) da også uavhengig av hvordan D skrives som en differens. Vi har bevist:

Teorem 1.1 *Det finnes en biadditiv paring* $\operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic}_E X \to \mathbb{Z}$, *hvis restriksjone til* $\operatorname{Pic}_E X \times \operatorname{Pic}_E X$ *er symmetrisk. Vi skriver* $(C, D) = (\mathcal{O}_X(C), \mathcal{O}_X(D))$

Om C og D er to effektive Cartier-divisorer som snitter propert og D har støtte i E, så er $(C, D) = \sum_x (C, D)_x$.