1. Del

Eliminasjon av ubetsemthet

Warning: En svært midlertidig versjon som er ikke er ferdig. Den er rotete og sikkert full av feil. Forbedring følger etterhvert!
versjon 0.3 — last update: 10/21/15 2:48:38 PM 9:13:51 AM

I dette avsnittet skal vi anta at skjemaet X er noethersk, irredusibelt og regulært av dimensjon to. Resultatene holder under noe svakere hypoteser, nemlig at de lokal ringene til X alle er entydigfaktoriseringsområder, men for enkelthets skyld antar vi at de regulære. I de viktigste anvendelsene er dette tilfelle. Alt vi skal gjøre vil også være lokalt i omegner omkring enkelte punkter, og det holder da selvsagt å anta at X er regulær i disse omegnene. Vi skal også anta at X er et skjema over et basisskjema S.

Studieobjektene i avsnittet er rasjonale avbildninger $\phi\colon X \dashrightarrow Z$, der Z er et projektivt skjema over basisskjemaet S. Vi er altså gitt en lukket embedding $Z \subseteq \mathbb{P}^N_S$.

Teoremet vi skal vise dreier seg om å eliminere ubestemt heten tilden rajonale avbildningen ϕ ved hjelp av suksessive oppblåsninger. Vi starter med noen enkle generaliter som når rasjonale avbildninger som ϕ er definert.

(1.1) At ϕ er en rasjonal avbildning, betyr at den er veldefinert på en åpen og tett mengde $U \subseteq X$. Skal man være presis, ser man på alle par (ϕ', U) der $U' \subseteq X$ er en åpne mengde og $\phi'\colon U' \to \mathbb{Z}$ er en regulær avbildning, og sier to slike par $('i, U')$ og (ϕ'', U'') er ekvivalente dersom ϕ' og ϕ'' er like på snittet $U' \cap U''$. En rasjonal avbildning er en ekvivalensklasse av slike par. To representanter for en restklasse, ϕ' og ϕ'', kan lappes sammen til en avbildning $U' \cup U''\colon Z$, og derfor finnes det en representatnt (ϕ, U) der U er maksimal i sterk forstand, den inneholder alle andre åpne som opptrer i et par. Vi skal alltid arbeide med en slik maksimal representant. Komplementet til U, som normalt vil være et endelig antall punkter, består av de punktene til hvilke ϕ ikke kan forlenges. Disse punktene kaller vi ubestemthetene til ϕ.

Eksempel 1.1. La $\phi\colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ være gitt ved $\phi(u) = (u^2+v^2)/uv$. Da er f definert over alt unntatt i origo, men kan ikke forlenges til hele $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ — grensen langs linjer $u = \lambda v$ avhenger av λ, så den kan ikke engang forlenges som en kontinuerlig funksjon ❋

(1.2) Vi skal beskrive en prosess som eliminerer ubetstemthetene til ϕ, og det er prosess som er lokal i hvert av punktene der ϕ er ubestemt. Vi skal vise at de ubestemte punktene er endelig i antal, og vi skal betegne dem med $\{x_1, \dots, x_s\}$. Prosessen går ut på å erstatte X med en flate X_n konstruert som en sekvens av oppblåsninger

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \qquad \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X,$$

der hver avbildning π_i altså er oppblåsningen av ett regulært punkt av høyde to på X_{i-1}. En slik X_n sies også å være *en modifikasjon* av X.

Vi lar π være sammensetningen av π_i-ene og lar U være det inverse bildet $\bigcup_j \pi^{-1}(x_j)$ av de ubestemte punktene. Restriksjonen $\pi|_U$ er en isomorfi mellom U og $X \backslash \{x_1, \dots, x_s\}$; Poenget er å konstruere oppblåsningssekvensen så det finnes en avbilding $\psi \colon X_n \to Z$ slik at $\psi|_U = \phi \circ \pi$. Vi sier at ϕ kan utvides til en regulær avbildning på modifiksjonen X_n. Vi skal bevise

Teorem 1.1 *Anta at X er en irredusibel, normal noethersk flate over S. Anta at Z er et projektivt skjema over S og at $\phi \colon X \dashrightarrow Z$ er en rasjonal avbildning over S. Da er ϕ kun ubestemt i et endelig antall punkter, og om X er regulær i disse, kan ϕ utvides til en regulær avbildning på en modifikasjn $\widehat{X}$ av X*

I diagrams form ser teoremet slik ut

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X \arrow[ur, dashed, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

der altså π er en sekvens av suksessive oppblåsninger av regulære punkter. Vi skal vise teoremet ved første å etablere det når $Z = \mathbb{P}^1_S$ for deretter å redusere det til dette spesialtilfellet. Reduksjonen er rett frem etter nesen, det er tilfellet med $Z = \mathbb{P}^1_S$ som er kjernen i beviset.

EKSEMPEL 1.2. Vi lar $X = \operatorname{Spec} k[u, v]$ og ser på den rasjonale funksjonen $\phi(u, v) = (u^2 - v^2)(uv)^{-1}$. Den er vel definerte utenfor origo, men der har den en ubestemthet. Vi blåser opp origo. På den åpne mengden $\widehat{X}_U$ $U \neq 0$ finner vi følgende uttrykk for ϕ:

$$u^2(1 - T^2)/u^2T = (1 - T^2)/T.$$

Teller og nevner forsvinner aldri samtidig, så det gir en veldefiner avbildning $\widehat{X}_U \to \mathbb{P}^1_k$. Tilsvarende, på den delen av $\widehat{X}$ der $V \neq 0$, finner vi uttrykket

$$v^2(S^2 - 1)/v^2S = (S^2 - 1)/S$$

for ϕ, og heller ikke her har teller og nevner noen felles nullpunkter, så kvotienten er en veldefinert avbildning $\widehat{X} \to \mathbb{P}^1_k$. På snittet $\widehat{X}_U \cap \widehat{X}_V$ er de to avbildningene dømt til å stemme overens, og vi har en avbildning $\psi\colon \widehat{X} \to \mathbb{P}^1_k$, som altså er definert på hele oppblåsningen og stemmer overens med ϕ på komplementet til den eksepsjonelle divisoren. ❄

(1.3) Moralen i dette eksemplet er enkel og klar, og den gir oss en tydelig ledesnor for det generelle beviset. På oppblåsningen vil telleren og nevneren til ϕ begge få en potens av ligningen for den eksepsjonelle divisoren som faktor. Vi forkortere mest mulig, og håper på det beste. I eksemplet var teller og nevner av samme multiplisitet, så ligningen for den eksepsjonelle forsvant, og vi stod igjen med de propre transformene $f^\flat$ og $g^\flat$ av telleren f og nevneren g. I dette spesifikke tilfellet har ikke disse felles nullpunkter siden tangenten til de opprinnelige korresponderende kurvene er forskjellige. Generelt er selvsagt ikke dette tilfellet, og vi må belage oss på å blåse opp en rekke ganger. Dessuten er vi avhengig av en mekanisme som garanterer oss at før eller senere vil teller og nevner ikke ha felles nullpunkter. Det betyr en heltallig invariant som i hvert steg i prosessen synker.

La oss ta eksempel til, men nå overlater vi detaljene til den flittige student.

Eksempel 1.3. Vi ser igjen på $X = \operatorname{Spec} k[u,v]$ men denne gang er den rasjonale funksjonen $\phi(u,v) = (u^2-v^3)/(u^2+v^3)$, der teller og nevner definerer "motsatte" spisser i origo. I første oppblåsning blir de propre transformene to "motsatte" parabler gjennom punktet $(1;0)$ på den eksepsjonelle fiberen, og dette er det eneste felles nullpunktet de har. De er begge tangent til E. I neste oppblåsning blir de propre transformene forsatt ikke adskilt, men treffer den eksepsjonelle i samme punkt, imidlertid har de nå fått forskjellige tangenter. Det betyr at de propre transformene i tredje oppblåsning ikke har felles nullpunkter, og vi får definert en global avbildning. ❄

Oppgave 1.1. Analyser og forstå den rasjonale avbildningen $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ gitt ved $T_0 \mapsto x$ og $T_1 \mapsto x-5$. ✷

Avbildniger inn i den projektive linjen

Som sagt, skal begynner vi med å vise teoremet for avbildninger inn i $\mathbb{P}^1_S$. Vi skal arbeide med en rasjonal avbildning $\phi\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ og betegner med U den den største åpne undermengde av X hvor ϕ er definert.

(1.4) Den projektive linjen $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ er unionen av de to åpne mengdene $D_+ = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T]$ og $D_- = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T^{-1}]$. Det betyr at på $\phi^{-1}D_+(T) \subseteq U$ har vi den regulære funksjonen $\alpha = \phi^\sharp(T)$ og på $\phi^{-1}D_-$ den regulære funksjonen $\alpha^{-1} = \phi^\sharp(T^{-1})$. De er inverse elementer i funksjonskroppen $K(X)$ til X. Dessuten er selvsagt $U = \phi^{-1}D_+ \cup \phi^{-1}D_-$.

Lemma 1.1 *Anta at X er normal. Komplementet $X \setminus U$ er da av kodimensjon to; i.e., det består av et endelig antall lukkede punkter, alle av høyde to.*

Bevis: La E være en komponent i $X \setminus U$ og la x være et generisk punkt til en av komponentene til E. Vi kan skrive $\alpha = fg^{-1}$ der f og g er elementer i den lokale ringen

$\mathcal{O}_{X,x}$. Siden hverken α eller α^{-1} ligger i $\mathcal{O}_{X,x}$ må f og g begge ligge i det maksimale idealet $\mathfrak{m}_x$.

Dersom komponenten vi ser på er av kodimesjon én, er $\mathcal{O}_{X,x}$ av høyde én, og er derfor en diskret valuasjonsring med valuasjon v. Men da er enten $v(fg^{-1}) \geq 0$ eller $v(gf^{-1}) \geq 0$, som er absurd siden hverken fg^{-1} eller gf^{-1} ligger i $\mathcal{O}_{X,x}$. Konklusjonen er at (f, g) er et ideal av høyde to. Alle komponentene til E er derfor av høyde to, *i.e.*, lukkede punkter siden $\dim X = 2$. ❑

(1.5) I lemmaet kan hypotesen at X er normal erstattes med at X tilfredstiller Serres betingelse R_1, *i.e.*, at alle punkter av høyde én er regulære. Det er enkelt å lage eksempler på flater som ikke er R_1 og som har avbildninger som ikke er veldefinert langs et underskjema av kodimensjon én. Ta *e.g.*, produktet av en singulær kurve over en kropp k med den affine linjen $\mathbb{A}^1_k$; konkret kan man bruke $E = V(v^2 - u^2(v-1)) \subseteq \mathbb{A}^2_k$, og la $X = E \times_k \mathbb{A}^1$. Da er funskjonen vu^{-1} ikke definert langs $(0,0) \times \mathbb{A}^1_k$.

(1.6) Vi lar nå X være en flate som vi skal anta er regulær, og vi er ikke nødvendigvis i en lokal situasjon. men til å begynne med konsentrerer vi oss om et punkt $x \in X$. Vi kan skrive $\alpha = \phi^\sharp(T)$ som en kvotient $\phi = f/g$ nær x. Vi har sette at idealet $(f, g) \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ er av høyde to og siden $\mathcal{O}_{X,x}$ er UFD er da f og g entydig opptil multiplikasjon med enheter.

Vi lar $C = V(f)$ og $D = V(g)$ være de korresponderened (lokale) divisorene, og definerer *den lokale invarianten* til ϕ ved $N_x(\phi) = (C, D)_x = \operatorname{length}_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x}/(f, g)$.

Videre lar vi m_x betegne den minste av multiplisitetene til f og g i x (de kan selvsagt være like, men da er m_x lik begge).

Lemma 1.2 *Med den nyss innførte notasjonen så er ϕ regulær i punktet x hvis og bare hvis $N_x(\phi) = 0$.*

BEVIS: Dette er klart: Den rasjonale funksjonen ϕ er regulær hvis og bare hvis enten f eller g ikke forsvinner i x. ❑

Summerer vi de lokale invarianten i alle punkter, finner vi den *globale invarianten*:

$$N(\phi) = \sum_x N_x(\phi).$$

Summen er endelig etter lemma xxx og etter lemma xxx er $N(\phi) = 0$ hvis og bare hvis ϕ er en regulær avbildning.

Lemma 1.3 *La $\widehat{X}$ være oppblåsningen av X i punktet x. La ϕ være en rasjonal funksjon på X og la $\widehat{\phi}$ være den tilsvarende rasjonale funksjonen på $\widehat{X}$. Da har vi at*

$$\sum_{y \in E} N_y(\widehat{\phi}) = N_x(\phi) - m_x^2$$

BEVIS: På oppblåsningen kan vi skrive $f = e^n f^\flat$ og $g = e^m g^\flat$. Kvotisenten er da på formen $e^{n-m} f^\flat / g^\flat$, og teller og nevner er uten felles faktor siden $f^\flat$ elle $g^\flat$ har flles faktorer og ingen av dem har e som faktor. Vi finner $C' = C^\flat + (n-m)E$ og $D' = D^\flat$. Dette gir

$$\begin{aligned}(C', D')_E =& (C^\flat + (n-m)E, D^\flat) = (C^\flat, D^\flat) + (n-m)(E, D^\flat) \\ =& (C, D)_x - nm + (n-m)m = (C, D)_x - m^2.\end{aligned}$$

❑

Teorem 1.2 *La $\phi\colon X \to \mathbb{P}^1$ være en rasjonal avbildning. Da finnes en modifikasjon $\widehat{X}$ av X og en utvideøse av ϕ til $X\widehat{X}$.*

BEVIS: Beviset går ved induksjon på den globale invaraianten $N(\phi)$. Drrsom $N(\phi) = 0$ er ϕ regulær, og vi r fremme, hvis ikke har f en ubestemthet x. Vi blåser opp punktet x og lar $\widehat{\phi}$ være den induserte rasjonale avbildningen på oppblåsningen. Vi har

$$N(\widehat{\phi}) = N(\phi) - m_x^2 < N(\phi)$$

siden $m_x \geq 1$, og vi er fremme ved induksjon. ❑

To enkle lemmata og reduksjon til $\mathbb{P}^1_S$

Vi skal etablere to enkle lemmaer — på grensen til å være banale — som tillater oss å redusere teoremet til det tilfellet at $Z = \mathbb{P}^1_S$ — selve reduksjonen er selvforklaende.

(1.7) Det første lemmaet tillater oss erstatte Z med $\mathbb{P}^N_S$ i teoremet, en utvdelse av ϕ med verdier i $\mathbb{P}^N_S$ vil så klart autmatisk faktorisere gjennom det lukkede underskjemaet $Z \subseteq P^N_S$.

Lemma 1.4 *Anta at $Z \subseteq \mathbb{P}^N_S$ er et lukket underskjema og at $\phi\colon Y \to \mathbb{P}^N_S$ er en regulær avbildning. Anta vider at det finnes en åpen og tette undermengde $U \subseteq Y$ slik at $\phi(U) \subseteq Z$. Da er $\phi(Y)$ inneholdt i Z.*

BEVIS: Vi har at $\phi(U) \subseteq \phi(Y) \subseteq \overline{phi(U)}$. For å innse den siste inklusjonen lar vi W være en åpen i $\mathbb{P}^N_S$ som snitter $\phi(Y)$. Da er $\phi^{-1}(W) \cap U$ en ikketom åpen i Y og følgelig er $\phi(\phi^{-1}(W) \cap U)$ en ikketom undermengde av $W \cap \phi(U)$. ❑

(1.8) Vi trenger noe mere notasjon og innfører homogene koordinater $T_0, \ldots, T_N$ på det projektive rommet $\mathbb{P}^N_S$. De fundamentale åpne memgdene $D_+(T_i)$ i $\mathbb{P}^N_S$ trekkes tilbake til åpne undermengder D_i av U via restriksjonen $\phi|_U$. Da er $U = \bigcup_i D_i$. Det er en totaltautologisk selvfølge at om $D_{i_1} \cup D_{i_2} = Y$, så er ϕ definert overalt.

Vi skal anvende oss av de kanoniske projeksjonene $\tau_{i_1 i_2}\colon \mathbb{P}^N_S \dashrightarrow \mathbb{P}^1_S = A[T'_{i_1}, T'_{i_2}]$, som sender geometriske punkter $(t_0, \ldots, t_N)$ til (t_{i_1}, t_{i_2}). Disse projeksjonene er regulære på $D_+(T_{i_1}) \cup D_+(T_{i_2})$, og det er klar at $\tau^{-1}_{i_1 i_2} D_+(T_{i_j}) = D_+(T_{i_j})$.

Det følgende lemmaet er en fancy måte å uttrykke den banale sannhet at om to av $N+1$ homogene koordinatene ikke forsvinner simultant på Y, så forsvinner ikke alle $N+1$ simultant.

Lemma 1.5 *Dersom* $\tau_{i_1 i_2} \circ \phi \colon Y \dashrightarrow \mathbb{P}^1_S$ *er regulær for ett valg av indekser* i_1 *og* i_2*, så er* ϕ *regulær.*

BEVIS: La $\psi = \tau_{i_1 i_2} \circ \phi$ Det er nok å si at $D_{i_1} \cup D_{1_2} = \psi^{-1}(D_+(T'_{i_1})) \cup D_+(T'_{i_2}) = Y$. ❑