1. Del

Castelnuovos-Enriques kriterium

Warning: En svært midlertidig versjon som er ikke er ferdig. Den er rotete og sikkert full av feil. Forbedring følger etterhvert!
versjon 1.0 — last update: 10/29/15 10:39:28 AM 9:13:51 AM

Guido Castelnuovo var en av de store italienerne — student av Veronese og en nær samarbeidspartner med Corado Segre, mens Federigo Enriques var Castelnuovos student. Vi skal her presentere deres kontraksjonslemma — eller nedblåsningslemma kunne man være fristet til å si. Det spiller en stor rolle i klassifikasjonsteoreien for flater.

Castelnuovos og Enriques bevis for deres kontraksjoneskriterium ble slevsagt gitt i en klassisk sammenheng, som omhandlet varieteter over en algebriask lukket kropp, *e.g.,* de komplekse tallene. Den generelle aritmestiske versjon som vi skal presentere ble først bevist av Shafarevich ([2]) og Lipman. I boken [1] skriver Quing Liu at det kan virke som om “teoremet om formelle funksjoner” er uunnværlig i beviset for Castelnuovo-Enriques, men vi gjør en slik påstand til skamme, og skal gi et bevis som ikke bruker noe tungt skyts — hverken “teoremet om formelle funksjoner’ eller “Zariskis Main theorem”, eller noen andre resultater av grov kaliber. Vi lener oss kun på grunnleggende algebraisk geometri og grunnleggende egenskaper ved veldig ample[1] knipper.

(1.1) Vi skal arbeide med et skjema X som er *projektivt* over et *affint* og noethersk basis-skjema S, og som vanlig skal X være hva vi vanligvis omtaler som en flate over S, det vil si et noethersk, redusert og irredusibel S-skjema av dimensjon to. Vi skal anta at $S = \operatorname{Spec} R$ der R er enten er en kropp eller R er en noethersk og dedekindsk ring, og i det siste tilfellet skal vi anta at X dominerer S, noe som er ekvivalent med at X er flatt over S. Strukturavbildningen til X betegner vi med ρ_X; det er altså en

[1] Anglisismen *ampel* er et håpløst ord på norsk, men ingen har så langt funnet en god norsk erstatning. *Yppig* er blitt foreslått for noe tid tilbake, men det har jo en odiøs biklang. Kanskje *romslig* kan være et alternativ — eller *kopiøs*?

avbildning $\rho_X : X \to S$. [1]

(1.2) Antagelsen om at X er projektivt over S medfører *per definisjon* at vi har en lukket embedding $\Phi\colon X \to \mathbb{P}_S(H^0(L))$, der L betegner det tilhørende "veldig ample" knippet, som altså ikke er annet enn tilbaketrekningen $\Phi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(H^0(L))}(1)$ av det tautologiske knippet på $\mathbb{P}_S(H^0(L))$ til X. At X er projektiv over S medfører også at X er av endelig type over S.

(1.3) En *eksepsjonell kurve av første slag* er et lukket én-dimensjonalt underskjema $E \subseteq X$ som har karakter av å være den eksepsjonelle fiberen i oppblåsningen av et regulært punkt. Med andre ord, det oppfyller følgende tre kriterier

- □ E er en Cartier-divisor på X, og $k = H^0(E, \mathcal{O}_E)$ er en kropp.
- □ $E \simeq \mathbb{P}^1_k$
- □ $\mathcal{O}_X(E)|_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1)$

Første bemerkning er at skjemaet X må være regulært langs E, for om en lokal ring A inneholder et element a som ikke er en nulldivisor og som er slik at A/aA er regulær, så er A selv regulær. Annen bemerkning er at siden E er proper over k og S er affin, er $\rho_X(S)$ et lukket punkt $s \in S$. Det er et k-punkt siden $H^0(E, \mathcal{O}_E) = k$.

En formulering som er ekvivalent til det tredje punktet ovenfor, og som er svært vanlig å finne i litteraturen, er at selvsnittet til E oppfyller $(E, E) = -1$. Vi har definert selvsnittet som $(E, E) = \deg \mathcal{O}_X(E)|_E$, og dette er lik -1 hvis og bare hvis $\mathcal{O}_X(E)|_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1)$.

(1.4) En eksepsjonell kurve av første slag har ikke bare karakter av å være den eksepsjonelle fiberen i en oppblåsningen, men det var Castelnuovos og Enriques innsikt at den faktisk er én — den kan blåses ned. For å være presise: Vi sier at E kan *blåses ned*, *kontrakteres* eller *kollapses* til et punkt dersom det finnes en flate Y — av endelig type over S — og en proper, birasjonal avbildning $\psi\colon X \to Y$ over S slik at

- □ Bildet av E under ψ består av ett punkt $y \in Y$, *i.e.*, $\psi(E) = \{y\}$.
- □ Avbildningen ψ induserer en isomorfi mellom $X \setminus E$ og $Y \setminus \{y\}$.

Dersom i tillegg y er et *regulært* punkt på Y sier vi naturlig nok at E kan kollapses til et regulært punkt. Vi skal vise følgende resulatet, som som oftes omtales som Castelnuovos-Enriques-kriteriet eller også av mange bare som Catselnuovos kriterium:

Teorem 1.1 *La X være en noethersk, redusert og irredusibel flate, projektivt og flatt over et affint skjema S som enten er spektrete av en kropp eller en dedekindsk ring. Anta at E er en eksepsjonell kurve av første slag på X. Da kan E kollapses til et regulært punkt.*

Det følger direkte fra faktoriseringsteoremet at kontrsaksjonsavbildningen $X \to Y$ ikke er annet oppblåsningen av punktet y i Y, og selvsagt, at E er den eksepsjonelle divsoren.

Beviset for teorem 1.1 har to naturlig adskilte deler. Først viser vi at E kan kollapses til ett punkt, for så å vise at dette punktet er regulært. Det er svært mange kurver som kan kollapses til et punkt — tenk bare på at alle singulariteter på flater kan løses opp — men det er bare de eksepsjonelle av første slag som kan kollapses til et *regulært* punkt.

(1.5) En grunnleggende ting som får kriteriet til å virke er at Picard-gruppen til den projektive linjen P^1_k er generert av det tautologiske invertible knippet $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)$. Dermed er restriksjonen $L|_E$ av L til E på formen $L|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$ for et heltall $d \geq 1$. Med andre ord, det invertible knippet $M = L(dE)$ er trivielt på E. Knippet M spiller den suverene hovedrolle i beviset.

I tillegg til at restriksjonen $M|_E$ oppfyller $M|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$, oppfyller også restriksjon av $M(-E)$ til E en viktig relasjon; vi har nemlig at $M(-E)|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1)$. Beviset for Catelnuovo-Enriques' kriterium henger på at globalseksjonene til både $M|_E$ og $M(-E)|_E$ alle kan forlenges til hele X. Vi skal ganske snart etablere:

Setning 1.1 *Restriksjonsavbildningene*

$$H^0(X, M) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k})$$

$$H^0(X, M(-E)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1))$$

er begge surjektive.

Den første surjeksjonen er instrumentell i beviset for at E kan kollapses, og den andre danner grunnlaget i beviset for at E kan kollapses til et regulært punkt.

(1.6) Det veldig ample — eller burde vi si det svært romslige? — knippet L på X kan, eventuelt etter å være blitt erstattet med en tilstrekkelig høy potens, velges slik at $R^1\rho_{X*}L = R^1\rho_{X*}L(-E) = 0$. Siden S er affin, medfører dette at $H^1(X, L) = H^1(X, L(-E)) = 0$. Vi kan også anta at $H^0(X, L)$ og $H^0(X, M)$ er fri moduler over R, eventuelt ved å ersatte S med en åpen omegn om s og X med dennes inverse bilde.

Det grunnleggende tekniske lemmaet

Vi skal i denne pragrafen etabler lemmaet som ligger til bunn for teoremet. Blant annet medfører det at vi har de to nødvendige surjeksjonene i setning 1.1 ovenfor.

(1.7) Det invertible knippet $\mathcal{O}_X(E)$ tilordnet Cartier-divisoren E har en seksjon som definerer E, og denne betegner vi med e. Den er entydig kun opp til multiplikasjon med enheter i ringen $H^0(X, \mathcal{O}_X)$, men vi fastlegger én e. Idelalet til E er isomorft med det invertible knippet $\mathcal{O}_X(-E)$, og dette lever i den korteksakte standard følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-E) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

der inklusjonen er gitt som multiplikasjon med seksjonen e.

Vi skal i tilleg til Cartier-divisoren E også trenge multiplene nE for naturlige tall n. Divisoren nE er et lukket underskjema som ikke er redusert, og ligningen for nE er e^n. Det tilordnede invertible knippe til er lik $\mathcal{O}_X(nE) = \mathcal{O}_X(E)^{\otimes n}$, og den assosierte standardfølgen er

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-nE) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{nE} \longrightarrow 0, \tag{1.2}$$

der altså inklusjonen er multiplikasjon med e^n. Skjemaet nE er også et lukket underskjema av $(n+1)E$. Idealet som definerer nE i $(n+1)E$ er lik restriksjon $\mathcal{O}_X(-nE)|_E$ til E av idelalet $\mathcal{O}_X(-nX)$ til nE i X, og denne restriksjonen er isomorf med $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n)$. Derfor har vi den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_{(n+1)E} \longrightarrow \mathcal{O}_{nE} \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

(1.8) Vi er så kommet frem til vårt tekniske hovedlemma:

Lemma 1.1 *La $\delta \leq 1$ betegne et helt tall. For alle naturlige tall n og r er restriksjonsavbildningen $H^0(M(\delta E)|_{(n+r)E}) \to H^0(M(\delta E)|_{nE})$ surjektiv. Vi har videre at $H^1(M(\delta E)|_{nE}) = 0$ for alle naturlige tall n.*

BEVIS: Det er tilstrekkelig å vise lemmaet for $r = 1$. Tensoriserer vi den korteksakte følgen 1.3 ovenfor med $M(\delta E)$ og bruker at $M|_E$ er triviell, finner vi følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n-\delta) \longrightarrow M(\delta E)|_{(n+1)E} \longrightarrow M(\delta E)|_{nE} \longrightarrow 0.$$

Lemmaet følger ved induksjon på n siden $H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n-\delta)) = 0$ når $n \geq 1$ og $\delta \leq 1$, og når det gjelder den andre påstanden, kan induksjonen starte fordi $M(\delta E)|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-\delta)$ hvis første kohomologigruppe forsvinner når $\delta \leq 1$. ❑

(1.9) Nå følger setning 1.1 om de to surjeksjonene umiddelbart. Restriksjonsavbildningen $H^0 M(\delta E)|_{dE}) \to H^0(E, M(\delta E)|_E)$ er surjektiv for $\delta = 0, -1$ etter lemma 1.1 ovenfor, og fra sekvensen 1.2 får vi, når vi setter $n = d$ og tensoriserer den med $M(\delta E)$, sekvensen

$$0 \longrightarrow L(\delta E) \longrightarrow M(\delta E) \longrightarrow M(\delta E)|_{dE} \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Tatt i betraktning av at $H^1(X, L(\delta E)) = 0$ *per hypotese*, siden $\delta = 0$ eller $\delta = -1$, slutter vi at restriksjonsavbildningen $H^0(X, M(\delta E)) \to H^0(M(\delta E)|_{dE})$ er surjektiv. Satt sammen med hva vi nettopp så, gir det de to surjeksjonene.

Til senere bruk, følgen vi får ved først å sette $\delta = 0$ i følgen 1.4 og så ta globalseksjoner ser slik ut:

$$0 \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(M|_{dE}) \longrightarrow 0. \tag{1.5}$$

Kontraksjonen av E

I denne paragrafen skal vi konstruere avbildningen ψ_0 som kollapser E til et punkt. Knippet M er laget slik at $M|_E = \mathcal{O}_E$, og vi har sett at den konstante seksjonen 1 i $\mathcal{O}_E$ kan utvides til en global seksjon σ_0 av M. Denne hjelper oss til å etablere at M er generert av sine globale seksjoner og således definerer en avbildning $\psi\colon X \to \mathbb{P}_S(H^0(M))$. Det er denne avbildningen — eller en liten pertubasjon av den — som er den kollapsende avbildningen vi søker.

(1.10) Starten på historien er følgende:

Lemma 1.2 *Det invertible knippet M på X er generert av sine globale seksjoner.*

BEVIS: Vi må vise at det for hvert punkt $x \in X$ finnes en globalseksjon i M som ikke forsvinner i x. Punktene i X kan i denne sammenheng naturlig deles inn i to grupper, de som ligger på E og de som ligger utenfor. Dersom $x \in E$, forsvinner ikke den utpekte seksjonen σ_0 i x siden jo $\sigma_0|_E = 1$.

På komplementet W til E er e^d en isomorfi mellom $L|_W$ og $M|_W$, og vi har diagrammet

$$\begin{tikzcd} H^0(W,L)\otimes_R \mathcal{O}_W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & L|_W \arrow[r] \arrow[d, "e^d"] & 0 \\ H^0(W,M)\otimes_R \mathcal{O}_W \arrow[r, "\beta"'] & M|_W & \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

der α og β er de kanoniske avbildningene. Siden den vertikale avbildningen e^d altså er en isomorfi, følger det at $e^d \circ \alpha$ er surjektiv, og følgelig er β surjektiv. ❑

(1.11) Sett i lyset av lemma 1.2 definerer det invertible M en avbildning $\psi_0\colon X \to \mathbb{P}_S(H^0(M))$, og denne avbildningen er proper siden X er proper over S. Bildet Y_0 er derfor et lukket underskjema i $\mathbb{P}_S(H^0(M))$.

Lemma 1.3 *Avbildningen ψ_0 er en embedding av $W = X \setminus E$ i $\mathbb{P}_S(H^0(M))$.*

BEVIS: Dette beviset er et projeksjonsargument. Inklusjonen av $H^0(L)$ i $H^0(M)$ som i følgen 1.5 på side 5 induserer en projeksjon $p\colon \mathbb{P}_S(H^0(M)) \dashrightarrow \mathbb{P}_S(H^0(L))$. Mekanismen i definisjonen ab en slik projeksjon er som følger. En avbildning $\phi\colon T \to \mathbb{P}_S(H^0(M))$

fra et skjema T over S er bestemt av det invertible knippet $N = \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(H^0(M))}(1)$ på T og den kanoniske avbildningen

$$H^0(M) \otimes_R \mathcal{O}_T \to N.$$

Sammensetningen $p \circ \phi$ av projeksjonen p og avbildningen ϕ er definert av det samme invertible knippet N, men seksjonene vi bruker er kun de som ligger i $H^0(L)$; *i.e.*, sammensetningen defineres av den kanoniske avbildningen

$$H^0(L) \otimes_R \mathcal{O}_T \to N.$$

Sammensetningen $p \circ \phi$ er kun definert der på den åpne mengden der seksjonene $H^0(L)$ genererer N. Situasjonen på undermengden W av X er beskrevet i diagram 1.6 på side 5. Det viser at sammensetningen $p \circ \psi_0$ er definert av $L|_W$ og avbildningen α; men det er jo presis de dataene som definerer restriksjonen til W av den opprinnelige embeddingen Φ av X i $\mathbb{P}_S(H^0(L))$. Vi oppsummerer med diagrammet:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[dr, "\Phi|_W"'] & \mathbb{P}_S(H^0(M)) \arrow[d, dashed, "p"] \\ & \mathbb{P}_S(H^0(L)) \end{tikzcd}$$

❏

Setning 1.2 *Avbildningen ψ_0 avbilder E på ett lukket k-punkt y_0 i Y_0 som ikke ligger i $\psi_0(W)$.*

BEVIS: At restriksjon $M|_E$ er triviell reflekteres i at avbildningen ψ_0 er konstant på E, det kan illustreres med følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} H^0(L) \arrow[r, hook] & H^0(M(-E)) \arrow[r, hook] & H^0(M) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"] & k \arrow[dl, "iso"] \\ & & M \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) & \end{tikzcd}$$

I diagrammet er γ restriksjonsavbildningen. Om $x \in X$, er punktet $\psi_0(x)$ i $\mathbb{P}(H^0(M))$ gitt ved evaluasjonsavbildningem β, og x ligger i E hvis og bare hvis denne faktoriserer gjennom γ som i diagrammet. Det betyr jo at ψ_0 er konstant på E — alle punkter sendes på punktet tilsvarende γ.

Om $x \in E$ forsvinner alle seksjonene fra $H^0(L)$ i x siden $H^0(L) \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$, mens i et punkt $z \notin E$ vil minst en av seksjonene i $H^0(L)$ ikke forsvinne, si σ — L er jo generer av sine seksjoner — og dermed forsvinner ei heller seksjonen $e^d\sigma$ av M der. Det betyr at $\psi_0(z) \neq y_0$. ❏

(1.12) Med en liten forandring av notasjonen, har vi nå konstruert et projektivt skjema $Y_0 \subseteq \mathbb{P}_S(H^0(M))$ og en proper, birasjonal avbildning $\psi_0 \colon X \to Y_0$ som kollapser E. Det vil si at $\psi_0(E)$ er et lukket punkt $y_0 \in Y_0$ som er rasjonalt over k, og ellers er ψ_0 en isomorfi mellom W og $Y_0 \setminus \{y_0\}$.

Nå er $\psi_{0*}\mathcal{O}_X$ en koherent $\mathcal{O}_{Y_0}$-modul, og vi lar $Y = \operatorname{Spec} \psi_{0*}\mathcal{O}_X$. Den kanoniske avbildningen $\mu \colon Y \to Y_0$ er endelig. *Per definisjon* faktoriserer avbildningen ψ_0 gjennom en avbildning $\psi \colon X \to Y$, som i diagrammet

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\psi_0"'] & Y \arrow[dl, "\mu"] \\ Y_0. & \end{tikzcd}$$

Generelt gjelder det at dersom sammensetningen av to avbildninger er proper, så må den først av de to være proper. Siden ψ_0 er proper, følger det således at også ψ er proper. Siden ψ_0 er en isomorfi mellom W og $Y_0 \setminus \{y_0\}$ gjelder det at ψ induserer en isomorfi mellom W og $Y \setminus \mu^{-1}(y_0)$. Fordi μ er endelig og E irredusibel, består $\psi(E)$ av ett lukket punkt. Videre gjelder det *per definisjon* at $\psi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. (Denne likheten er eneste beveggrunn til denne ellers muligens noe umotiverte manøver med Y_0 og Y.) Vi oppsummerer:

Setning 1.3 *Vi har en proper avbildning $\psi \colon X \to Y$ som tilfredstiller $\psi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, og som er slik at bildet $\psi(E)$ kun består av ett lukket k-punkt y i Y, og slik at ψ induserer en isomorfi mellom $X \setminus E$ og $Y \setminus \{y\}$.*

(1.13) Som den observante student sikkert allerede har innsett, holder setning 1.3 stikk i en vesentlig mer generell sammenheng enn vi har arbeidet i. Det er to substansielt viktige poenger i beviset. For det første, at restriksjonen $M|_E$ er triviell, altså lik $\mathcal{O}_E$, og derfor har en seksjon som ikke forsvinner i noe punkt; dernest, at denne seksjonen kan utvides til hele X. Det siste henger på lemma 1.1 som bruker at konormalbunten $\mathcal{O}_E(-E)$ er tilstrekkelig positiv så de nødvendige første kohomologigrupper forsvinner. De resterende deler av argumentet er av helt generell karakter.

For eksempel om $E \simeq \mathbb{P}^r_k$ og $\mathcal{O}_X(E)|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k}(-t)$ med $t \geq 1$ vil et resultat tilsvarende 1.3 være gyldig.

OPPGAVE 1.1. Bevis påstanden ovenfor i detalj. ✷

1.13.0.1 Regularitet

Det neste skritt er å vise at Y, som konstruert i setning 1.3 i forrige paragraf, faktisk er regulært i punktet y. Som lbservert, er setning 1.3 av en ganske generell karakter og er gyldig i mange sammenhenger. At y er et regulært punkt derimot, er ganske spesifikt for eksepsjonelle kurver av første slag. Det er et vell av kurver, også rasjonale, på flater som kan kollapse til singulære punkter, men det er kun de med $\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_{P^1_k}(-1)$ som kan blåses ned til et regulært punkt.

OPPGAVE 1.2. La $E \subseteq \mathbb{P}^r_k$ være en projektiv kurve og la $X_E \to E$ være linjebunten tilsvarende det invertible knippet $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)|_E$. Da ligger E inne i X_E som nullseksjonen E_0 til linjebunten. La C_E være kjeglen over E. Vis at det finnes en avbildning $X_E \to C_E$ som kolapser E_0 til topp-punktet i kjeglen. ✷

(1.14) Vi skal se at det maksimale idealet $\mathfrak{m}_y$ er generert av to elementer, og det er nok til at den lokale ringen $\mathcal{O}_{Y,y}$ er regulær siden Y jo er av dimensjon to.

(1.15) Vi skal erstatte Y med en tilstrekkelig liten affin og åpen omegn U om y, og samtidig erstatte X med det inverse bildet $V = \psi^{-1}U$. Det er jo en åpne omegn om E. Vi forsetter å skrive ψ for restriksjonen $\psi|_V$, og dette er fortsatt en proper avbildning $V \to U$ (Generelt gjelder det at restriksjoner av propre avbildniger til inverse bilder fortsetter å være propre).

Utgangspunktet for å finne erstatningen U, er den åpne og affine mengden $U_0 = Y_0 \cap D_+(\sigma_0) \subseteq \mathbb{P}(H^0(M))$. Det er en omegn om y_0 i Y_0 siden σ_0 ikke forsvinner på E. Nå er μ endelig, og derfor er også $U = \mu^{-1}U_0$ en åpen og affin mengde, og den inneholder y. Vi lar, som sagt, $V \subseteq X$ betegne det inverse bildet av U; *i.e.,* vi setter $V = \psi^{-1}U$ (da er V også lik $\psi_0^{-1}U_0$).

(1.16) Undermengden V av X består presis av de punktene i X der multipliaksjon med seksjonen σ_0 er invertibel — det er jo slik $D_+(\sigma_0)$ er definert i $\mathbb{P}^N_S$, og denne egenskapen nedarves ved tilbaketrekning. Det betyr at multiplikasjon med σ_0 gir en isomorfi $M|_V \simeq \mathcal{O}_V$, og dermed også en isomorfi $M(-E) \simeq \mathcal{O}_V(-E)$.

Vi vet at $M(-E)|_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1)$, og fra setningen om de to surjeksjoner 1.1 på side 3, kan alle disse forlenges til seksjoner av $\mathcal{O}_V(-E)$. Vi velger to av dem σ_1 og σ_2 som basis, og konstruerer et Koszul-komplekse ved deres hjelp:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(E) \longrightarrow \mathcal{O}_V^2 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_V(-E) \longrightarrow 0, \tag{1.7}$$

der $\gamma(a_1, a_2) = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$. Avbildningen γ er ikke *a priori* surjektiv, men ved å krympe U kan vi anta at den faktisk er surjektiv:

Lemma 1.4 *Det finnes en åppen omegn $U' \subseteq U$ om y slik at om $V' = \psi^{-1}V$ så er $\gamma|_{V'}$ er surjektiv.*

BEVIS: De to seksjonene σ_1 og σ_2 genererer nemlig $\mathcal{O}_V(-E)|_E$, og derfor er γ surjektiv på en omegn W om E. Bildet $\psi(V \setminus W)$ av komplementet $V \setminus W$ til denne er en lukket undermengde av Y som ikke inneholder punktet y siden ψ er proper. Vi kan derfor finne en åpen og affin omegn U' om y som ikke den snitter $\psi(V \setminus W)$. ❑

Vi erstatter U med denne omegnen og V med dens inverse bilde.

Lemma 1.5 *Vi har at $\psi_*\mathcal{O}_V(-E) = \mathfrak{m}_y$ og $R^1\psi_*\mathcal{O}_V(E) = 0$.*

Dette lemmaet medfører teoremet, for skyver vi sekvensen 1.7 ned på U finner vi den eksakte følgen

$$\mathcal{O}_U^2 \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_V(-E) \longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_V(E)$$

og siden $\psi_*\mathcal{O}_V(-E) = \mathfrak{m}_y$ og $R^1\psi_*\mathcal{O}_V(E) = 0$, finner vi surjeksjonen

$$\mathcal{O}_U^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_y \longrightarrow 0,$$

som viser at $\mathfrak{m}_y$ er generert av elementene $\psi_*\sigma_1$ og $\psi_*\sigma_2$.

BEVIS: Til den første påstanden viser vi til den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(-E) \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0,$$

som skøvet ned på U gir

$$0 \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_V(-E) \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow k(y)$$

siden vi har ordnet det slik at $\psi_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_U$.

Den andre påstanden angripes ved bruk av de eksakte følgene

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(-(n+1)E) \longrightarrow \mathcal{O}_V(-nE) \longrightarrow \mathcal{O}_E(-nE) \longrightarrow 0.$$

der $n \geq -1$ er et heltall. I disse følgene er $\mathcal{O}_E(-nE) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n)$, og skyver vi dem ned på U, finner vi de eksakte følgene

$$R^1\psi_*\mathcal{O}_V(-(n+1)E) \longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_V(-nE) \longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n).$$

Med det i tankene at $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n) = H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n)) = 0$ når $n \geq -1$, er vi fremme ved nedstigende induksjon på n med engang vi har etablert neste lemma: ❑

Lemma 1.6 *Vi har at $R^1\psi_*\mathcal{O}_V(-nE) = 0$ for n tilstrekkelig stor.*

BEVIS: Vi benytter oss av de to seksjonene σ_1 og σ_2 til å konstruere en avbildning $\tau\colon V \to \mathbb{P}^1_U = U \times \mathbb{P}^1$, den er veldefinert siden følgen 1.7 på side 8 forteller oss at de genererer det invertible knippet $\mathcal{O}_V(-E)$. En definerende egenskap ved avbildningen τ er at $\tau^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_U}(1) = \mathcal{O}_V(-E)$. Vi har diagrammet

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\psi"'] & \overline{V} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & \mathbb{P}^1_U \arrow[dl, "pr"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

der $\overline{V} = \tau V$ er bildet av V. Det er et lukket underskjema i $\mathbb{P}^1_U$ fordi V er er et propert skjema over U.

Vår første observasjon er at τ er en endelig avbildning: Siden ψ er proper, er τ proper, så det er nok å sjekke at τ ha endelige fibre. Om $x \notin \tau E$, så er τ en isomorfi på en omegn om $\tau^{-1}x$ siden ψ er en isomorfi på en omegn om $\tau^{-1}x$. Videre er $\tau|_E$ en isomorfi mellom E og $\mathbb{P}^1_k \subseteq \mathbb{P}^1_U$ fordi $\mathcal{O}_V(-E)|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1)$, og restriksjonen av de to seksjonenen σ_1 og σ_2 utgjør en basis for $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(1))$. Det betyr at τ har endelige fibre også over punkter som ligger i bildet av E.

Det følger at

$$R^1\psi_*\mathcal{O}_V(-nE) \stackrel{1}{=} R^1p_*\tau_*\mathcal{O}_V(-nE) \stackrel{2}{=} R^1p_*(\tau_*\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_U}(n)).$$

der likeheten merket med 1 holder stikk på grunn av at τ er endelig, og den andre likheten, som er merket 2, følger av projeksjonsformelen og det faktum at $\tau^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_U}(n) = \mathcal{O}_V(-nE)$. For tilstrekkelig store n er $R^1p_*(\tau_*\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_U}(n)) = 0$ fordi $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_U}(1)$ selvsagt er et ampelt knippe på $\mathbb{P}^1_U$, og dermed er vi fremme. ❑

OPPGAVE 1.3. Betrakt ligningen $x^2 - 7y^2 = z^2$ og la $R = \mathbb{Z}$ og la $X \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ være gitt ved $x^2 - 7y^2 = z^2$. I den affine delen der $y \neq 0$, er ligningen $u^2 - v^2 - 7$. Vis at punktet (u,v,7) er et regulært punkt på X. Vis at fiberen $X_7 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_7}$ er unionen av to linjer som begge er eksepsjonelle. Hva er nedblåsningen? ✷

OPPGAVE 1.4. Beviset for Castelnuovo-Enriques-kriteriet er basert på projeksjoner, men i de to forskjellige tilfellene R en kropp eller R en dedekindsk ring arter disse projeksjonene seg dramatisk forskjellig.

Vis at om R er en dedekindsk ring så er $H^0(L)$ og $H^0(M)$ av samme rang over R, og i fall A betegner inklusjonen av $H^0(L)$ i $H^0(M)$, så er kokjernen tCoker A av endelig lengde. ✷

OPPGAVE 1.5. Anta nå som en kokret illustrasjon av fenomenet i forrige oppgave at $R = \mathbb{Z}$ og at matrisen A er gitt som

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & \\ 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$$

Denne gir en injektiv avbildning $R^3 \to R^3$ og derfor en projeksjon p_A som er en rasjonal avbildning $p_A \colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$. Bestem kokjernen til A. Beskriv fundamentallokuset (*i.e.*, punktene der den ikke er definert) til p_A. Linjen $x_2 = 0$ i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_5}$, punktet $x_1 = x_2 = 0$ i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_{13}}$ og linjen $x_3 = 0$ i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_7}$. ✷

OPPGAVE 1.6. Samme oppgave som i forrige, men nå er $R = \mathbb{C}[t]$ og A er matrisen

$$\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t(t-1) & 0 \\ 0 & 0 & t(t-2) \end{pmatrix}$$

✷

Bibliografi

[1] Quing Lui. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, 2002.

[2] I. R. Shafarevich. *Lectures On Minimal Models and Birational Transformations of Two Dimensional Schemes*. Tata Institute of Fundamental Research, 1966.