1. Del

Minimale modeller

Warning: En svært midlertidig versjon som er ikke er ferdig. Den er rotete og full av feil. Forbedring følger etterhvert!
versjon 1.1 — last update: 11/25/15 2:14:31 PM

Det finnes selvsagt svært mange forskjellige regulære flater som er birasjonalt ekvivalente til en gittn flate X, *e.g.,* man kan blåse opp så mange punkter man vil og eventuelt blåse med nye (-1)-kurver som måtte ha oppstått. Som vanlig når man står over for en ekvivalensklasse prøver man å finne spesielle representanter som på et eller annen vis peker seg ut og skiller seg fra hopen av elementer i klassen. Så også vi vår sammenheng, og for oss er det de såkalte *relativt minimale* flatene som spiller rollen som kanoniske representanter. I en scenografi der vi arbeider med flater over en basisskjema S er en flate X *relativt minimal over S* dersom den oppfyller følgende kriterium:

- ☐ Dersom Y er en regulær flate projektiv over S, og $\phi\colon X \to Y$ er en proper, birasjonal og regulær avbildning over S, så er ϕ en isomorfi.

(1.1) I fall man insisterer på å bruke ordet minimal i en ordningssammenheng, kan man ordne flatene som tilhører en birasjonal klasse ved å si a X er mindre enn Y dersom Y dominerer X; *i.e.,* dersom det finnes en birasjonal, proper og regulæ avbildning $\psi\colon Y \to X$ over S. Da er X en relativt minimal flate overe S hvis og bare hvis den er minimal i denne ordningen,*i.e.,* det er ingen andre som er mindre. Og gitt at enhver flate dominerere en relativt minimal en, vil en realtivt minimal flate være et *minste* element dersom den er entydig, *i.e.,* den en mindre enn alle andre, og da kalles den en *minimal* flate. Betegnelsene *relativt minimal modell* og *minimal modell* er også kurante.

(1.2) Vi skal arbeid med en regulære flater som har en projektiv og flat strukturavbildning til S, og vi skal anta at den generiske fiberen er irredusibel — og om ikke annet er uttrykt eksplisitt, betyr "flate" en slik. Basisskjemaet S skal som vanlig enten være spektret til en kropp eller et dedekindsk skjema, men i motsetning til tidligere er

S ikke nødvendigvis et affint skjema. Det er globale aspekter ved enkelte problemstillinger, også om S er en kurve.

(1.3) Det er to spørsmål som reiser seg. For det første om relativt minimale flater finnes og for et andre i hviken grad de er entydige. Svaret på det føste er ja, i enhver bitrasjonal ekvivalensklasse finnes det alltid relativt minimale flater; sagt annerlede en hver regulær flate over S har en *relativt minimal modell* over S. I bunn og grunn er dette en direkte følge av Castelnuovo-Enriques-kriteriet. Når det gjelder entydighet, er situasjonen vesentelig mer subtil. Det er ikke alltid riktig at en relativ minimal modell er entydig, men det er i det alt vesentlige ett fenomen som gir flertydighet, de såkalte *elementære transformasjonene*. Over en algebraisk lukket kropp k er alle unntakene klassifisert. Det dreier seg om de *reglerte flatene*, *i.e.*, flater som er fibrert over en regulær kurve C med alle fibre isomorfe med $\mathbb{P}^1_k$, og disse kan alle konstrueres ved en følge av suksessive elementære transformasjoner med ungangspunkt i produktet $\mathbb{P}^1_k \times C$.

(1.4) Birasjonale avbildninger mellom regulære flater er svært nært knyttet til eksepsjonelle kurver av første slag, så følgende lemma er ikke oppsiktsvekkende:

Lemma 1.1 *Anta at X er en regulær flate som er projektiv over over S, og la ρ_X være strukturavbildningen. Da er X relativt minimal over S hvis og bare ingen av fibrene til ρ_X inneholder eksepsjonelle kurver av første slag.*

BEVIS: Dersom $E \subseteq X$ er en eksepsjonell kurve av første slag, kan E blåses ned etter Catelnuovo-Enriques-kriteriet, og følgelig er X ikke minimal. Dersom E ikke er minimal, finnes det en regulær flate X' over S og en proper, birasjonal og regulær avbildning $\phi\colon X \to X'$ over S. Etter faktoriseringsteoremet er avbildningen ϕ en sammensetning av suksessive oppblåsninger, og den eksepsjonelle fiberen til den siste av disse vil være en eksepsjonell kurve av første slag. ❑

(1.5) Begrepet *relativ* minimal flate er virkelig relativt til S. Om S er en kurve — riktig nok ikke affin slik vi har antatt — kan man lett tenke seg horisontale kurver som er eksepsjonelle. Det vil si kurver $E \subseteq X$ som dominerer S, og som oppfyller kravene til å være eksepsjonell av første slag. En slik kurve kan blåses ned etter Catelnuovo-Enriques-kriteriet, men da minster man selvsagt avbildningen til S.

(1.6) Det er ikke slik at å være relativt minimal er kompatibelt med basisutvidelser. Enkle eksempler på det fenomenet finner man blant det som i den angelsaksiske delen av verden kalles for *conic bundles*, og som her hjemme blir noe i retning av det tungvinte *kjeglesnitt-bunter*. Vis skal nå se på noen slike definert over de hele tallene $\mathbb{Z}$.

La R være ringen $\mathbb{Z}[1/2]$, altså de hele tallene med 2 invertert. Da er $S = \operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{2\}$. Anta at p og q er to forskjellige odde primtall. Vi lar X være flaten i $\mathbb{P}^2_R = \operatorname{Proj} R[u, v, w]$ gitt ved ligningen

$$pu^2 - qv^2 - w^2 = 0.$$

De tre partiellderiveret er $2pu$, $-2qv$ og $-2w$, og disse forsvinner simultant kun i de to punktene $((0;1;0),q)$ og $((1;0;0),p)$. Det betyr at for alle andre $s \in S$ er fiberen X_s glatt, mens de to punktene er singulære på sin fiber. Det er lett å sjekke at X_s er geometrisk irredusibel for $s \neq p,q$ (regulære kjeglesnitt er irredusible), og siden fulle fibre har et selvsnitt lik null, kan ingen av disse være eksepsjonelle.

Vi skal se at såfremt hverken $\sqrt{p} \in \mathbb{F}_q$ eller $\sqrt{q} \in \mathbb{F}_p$, så inneholder heller ikke fibrene over p og q eksepsjonelle kurver—de viser seg å være irredusible de også— og følgelig er X relativt minimal over S. Fiberen X_q over q, for eksempel, er gitt ved ligningen

$$X_q = V(pu^2 - w^2) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_q} = \operatorname{Proj} \mathbb{F}_q[u,v,w].$$

Nå har p ingen kvadratrot i $\mathbb{F}_q$, så dette er et irredusibelt skjema, og igjen, en full fiber er ikke eksepsjonell. Et symmetrisk agument viser at fiberen X_p også er irredusibel.

Utvider vi imidlertid basisen til $R' = R[\sqrt{p}]$, for eksempel,vil flaten $X' = X \otimes_R R'$ ikke lenger være relativt minimal. Da spaltes nemlig fiberen X'_q i unionen av de to linjene $w = \pm\sqrt{p}u$ i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$, og at hver av disse er eksepsjonell av første slag, følger fra lemma 1.2 nedenfor om fibre som splitter. Det er jo klart at linjene begge er isomorfe med $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$, og at snittpunktet $(0;1;0)$ er rasjonalt over $\mathbb{F}_p$.

(1.7) Lemmaet i denne paragrafen er tidvis nyttig, ikke bare i forbindelse med eksemplet ovenfor. Det sier at dersom en fiber splitter i to på en nærmere bestemt måte, må de to komponentene være eksepsjonelle av første slag.

Lemma 1.2 *La $\rho_X \colon X \to S$ være en projektiv fibrasjon av en regulær flate X over det dedekindske skjemaet S, og la $s \in S$ være et lukket punkt. Anta at fiberen $F = \rho_X^{-1}(s)$ splitter som $F = E_1 + E_2$ der E_1 og E_2 er to effektive Cartier-divisorer som begge er isomorfe med $\mathbb{P}^1_{k(s)}$. Anta videre at E_1 og E_2 snitter i ett punkt x rasjonalt over $k(s)$. Da er E_1 og E_2 begge eksepsjonelle kurver av første slag.*

BEVIS: Det er nok å sjekke at $E_i^2 = -1$. Siden x er rasjonalt over $k(s)$, er $(E_1, E_2) = 1$, og vi finner

$$0 = F^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + 2(E_1, E_2) + E_2^2 = E_1^2 + 2 + E_2^2. \tag{1.1}$$

Etter lemma xxx er snittformen negativt semi-definit på komponentene til en fiber, og siden ingen av de to E_i-ene er en full fibrer, vet vi derfor at $E_i^2 < 0$. Det følger fra ligning 1.1 ovenfor at $E_i^2 = -1$, og vi er fremme. ❑

OPPGAVE 1.1. Vi skal se på en klasse kjeglesnitt-bunter over de rasjonale tallene. Vi velger homogene koordinater U_1, U_2 og U_3 på det projektive planet $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ og lar t være en koordinat på $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$. Gitt tre polynomer $f_i(t) = a_i(t - \alpha_{i1})(t - \alpha_{i2})$, for $i = 1,2,3$ der a_i-ene og α_{ij}-ene alle er rasjonale tall, *i.e.*, $a_i \in \mathbb{Q}$ og $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Vi definerer en flate $X \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$, fibrert over $\mathbb{A}^1_Q$ via annen projeksjon, ved hjelp av ligningen

$$f_1(t)U_1^2 + f_2(t)U_2^2 + f_3(t)U_3^2 = 0.$$

a) Vis at X er en regulær flate hvis og bare hvis $\alpha_{ij} \neq \alpha_{i'j'}$ hver gang $(i,j) \neq (i',j')$.

b) Vis at fibrene som ikke er regulære er presis fibrene over punktene α_{ij} i $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$.

c) Anta at klassene a_r og $\alpha_{ij} - \alpha_{i'j'}$ for $r = 1,2,3$ og $(i,j) \neq (i',j')$ er lineært uavhenig i vektorrommet $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^{*2}$ over $\mathbb{F}_2$. Vis at X er minimal over $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$.

d) Finn et rasjonalt tall a slik at $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ ikke er minimal.

e) For dem som ikke er vant med skapninger av typen $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$: Vis at i den multiplikative gruppen $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ er alle ikke trivielle elementer av orden to, og at $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ derfor kan betraktes som et vektorrom over kroppen $\mathbb{F}_2$ med to elementer. Vis at klassene til de rasjonale tallene $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ er lineært uavhengig hvis og bare hvis produktet $\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_r$ ikke er kvadrat. Vis at $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ er av uendelig dimensjon over $\mathbb{F}_2$.

Eksistens av minimale modeller

Dette avsnittet inneholder et bevis for det grunnleggende eksistensteoremet; vi skal se at alle regulære flater projektive over S har en minimal modell over S.

Teorem 1.1 *Anta at X er en flate, projektiv og regulær over S. Da har X en minimal modell over S.*

Strategien for beviset ligger snublende nær. I fall det ikke ligger noen eksepsjonelle kurver av første slag inneholdt i X, er X selv minimal, og vi er fremme. Finnes det derimot en eksepsjonell kurve av første slag på X, tillater Castelnuovo-Enriques-kriteriet oss å blåse den ned. Dersom vi disponerer over en invariant som synker ved nedblåsning, er vi således fremme ved nedstigende induksjon på denne invarianten. Beviset går ut på å finne en slik invariant.

(1.8) Dersom X er projektiv over en kropp, *i.e.*, $S = \operatorname{Spec} k$, vil $\dim_k H^1(X, \Omega^1_X)$ være invarianten vi leter etter. Den er endelig, siden X er proper over S, og selvfølgelig heltallig, og lemma 1.3 nedenfor forteller oss at den synker ved nedblåsning.

(1.9) Dersom X er fibrert over spekteret til en dedekindsk ring, er invarianten i bunn og grunn såre enkel, men det kreves noe teori for å etablere den.

Et resultat i EGA forteller oss at siden den generiske fiberen X_η til ρ_X er irredusibel, så finnes det en åpen tett undermengde U av S slik at fiberen X_s er irredusibel for $s \in U$. Komplementet til U er endelig, og vi kan slutte at ρ_X kun har endelig mange redusible fibre. Invarianten vår er antall komponenter i de redusible fibrene. Det er klart at denne invarianten synker når vi blåser ned en eksepsjonelle kurve over S. En slik kurve er jo en irredusible komponent i en redusibel fiber—for en full fiber F tilfredstiller $(F)^2 = 0$—og denne komponenten forsvinner, og ingen ny oppstår når vi blåser ned.

EKSEMPEL 1.1. Det finnes flater med uendelig mange eksepsjonelle kurver. Standardeksemplet er $\mathbb{P}^2_k$ med ni oppblåste punkter. Det er ikke slik at oppblåsningen i alle mulige valg av ni punkter vil ha uendelig mange eksepsjonelle kurver, men er punktene tilstrekkelig generelle, vil oppblåsningen ha tellbart mange eksepsjonelle av første slag. ❄

OPPGAVE 1.2. Anta at de ni punktene ligger på en linje. Vis at oppblåsningen kun har ni eksepsjonelle av første slag. ✷

OPPGAVE 1.3. La X være oppblåsningen av $\mathbb{P}^2_k$ i seks forskjellige punkter. Anta at punktene er valgt slik at ikke tre av dem ligger på linje og ikke alle seks på et kjeglesnitt. Vis at den propre transformen av en linje gjennom to punkter, og den propre transformen av et kjeglesnitt gjennom fem av punktene alle er eksepsjonelle av første slag. Tell opp hvor mange eksepsjonelle av første slag dette gir sammen med de eksepsjonelle fibrene (svaret er 27). ✷

Et mellomspill om differensialer

I beviset for eksistens av minimale modeller over en kropp, har vi behov for en invariant til flater som synker ved nedblåsning. En slik etableres ved følegnde lemma:

Lemma 1.3 *La $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ være oppblåsningen av et lukket punkt $x \in X$. Da har vi en eksakt sekvens*

$$0 \longrightarrow \pi^*\Omega^1_X \xrightarrow{d\pi} \Omega^1_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k(x)}}(-2) \longrightarrow 0.$$

Spesielt har vi dersom X er proper over en kropp k, at

$$\dim_k H^1(\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}) = \dim_k H^1(X, \Omega^1_X) + \dim_k k(x).$$

BEVIS: Vi kan anta at $X = \operatorname{Spec} A$ er affin og at det maksimale idealet $\mathfrak{m}_x$ tilsvarende x er generert av to elementer u og v. Da er oppblåsningen $\widetilde{X}$ bestemt som det lukkede underskjemaet $X \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} A[U, V]$ med ligning $uV - vU$, og denne ligningen er en seksjon av det invertible knippet $pr^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(1)$. Oppblåsningsavbildningen π er restriksjonen av første projeksjon til $\widetilde{X}$, og restriksjonen av annen projeksjon betegner vi med p. Det gjelder at $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E) = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(1)$.

Diagrammet nedfor er laget utifra standarsekvens for differensialene til en embedding, som utgjør den midterste linjen i dagrammet. Vi bruker de to likhetene

$$\Omega^1_{X \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}} = pr_1^*\Omega^1_X \oplus pr_2^*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}} \text{ og } \Omega^1_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(-2).$$

Alle vertikale piler i diagramme er enten surjektive eller injektive, og det burde være opplagt hvilke som er hva, og forøvrig er resten av diagrammet selvforklarende; *I* betegner idealet til $\widetilde{X}$ i produktet. Den korteksakte følgen i lemmaet, som vi er på jakt etter, gjenkjenner vi som kolonnen ytterst til høyre i diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(2E) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k(x)}}(-2) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I/I^2 \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \pi^*\Omega^1_X \oplus p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^1_{k(x)}} \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^1_{\widetilde{X}} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & \pi^*\Omega^1_X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[u] & \pi^*\Omega^1_X \arrow[r] \arrow[u, "d\pi"'] & 0
\end{tikzcd}$$

❑

Entydighet

Minimale modeller er ikke alltid entydige, men unntakene går det an å beskrive ganske komplett. Det dreier seg om såkalte *reglerte flater*, *i.e.*, fibrasjoner hvis generiske fibre er kurver av genus null. Om vi arbeider over en algebraisk lukket kropp k, betyr dette at de fleste fibrene er isomorfe med $\mathbb{P}^1_k$. Over en annen basis er situasjonen noe mer komplisert, men fibrene vil ha aritmetisk genus lik null, og de vil etter en endelig kroppsutvidelse K av k bli isomorfe med $\mathbb{P}^1_K$.

En slik fibrasjon kan modifiseres gjennom hva man kaller en *elementær transformasjon* og som vi beskriver nedenfor, og slike modifikasjoner vil ofte vær ikkeisomorfe realtive minimale modeller for samme flate.

EKSEMPEL 1.2. Vi skal arbeide over en algebraisk lukket kropp k som ikke er av karakteristiskk to; *e.g.*, $k = \mathbb{C}$. La $R = k[t]$ og la $X \subseteq \operatorname{Proj} R[u, v, w]$ være det lukkede underskjemaet

$$X = V(tw^2 - uv)$$

Dette er en familie av kjeglesnitt med en parameter t. De tre partiell deriverte er $2tw$, $-u$ og $-v$, så dersom $t \neq 0$, er fiberen X_t glatt. Punktet $x = ((0; 0; 1), 0)$ et singulært punkt på fiberen over $t = 0$, men siden ligningen tar formen $t - uvw^{-2}$ nær x, og uw^{-1} og vw^{-1} er del av et regulært parametersystem omkring x, er flaten X selv regulær i x. Fiberen X_0 er unionen av de to linjene $E_1 = V(u, t)$ og $E_2 = V(v, t)$ og hver av disse er eksepsjonelle kurver av første slag, *e.g.*, etter lemma 1.2 om fibre som splitter, og kan blåses ned over S henholdsvis til flatene X_1 og X_2.

Nå finnes det en involusjon $\sigma \colon X \to X$ definert over S som er gitt ved formelen $\sigma((u; v; w), t) = ((v; u; w), t)$. Opplagt gjelder det at $\sigma(E_1) = E_2$, og det medfører at σ induserer en isomorfi $\sigma' \colon X_1 \to X_2$ over S. Altså er X_1 (og X_2) en minimal modell for X over S.

Man skal være oppmerksom på at det er to mulig definisjoner av hva det vil si å være ekvivalente minimale modeller over S. Enten kort og godt at de to modellene er isomorfe over S, eller den mer restriktive varianten at man forlanger en isomorfi σ slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, "\sigma"', "\simeq"'] & & X_2 \end{tikzcd}$$

kommuterer. Dersom X_1 og X_2 er isomorfe over S, oppfyller de det strengere ekvivalenskravet dersom isomorfien er lik identiteten generisk sett. Modellene X_1 og X_2 i eksemplet er ekvivalente etter den første definisjonen, men ikke etter den andre. Isomorfien σ' er ikke lik identiteten på den generiske fiberen. ❄

EKSEMPEL 1.3. Hvis man vil, kan man utvide basisskjemet S i forrige eksempel til å være $S = \mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj} k[U,V]$ med $t = UV^{-1}$, og X erstattes med den nye X hvis ligning er

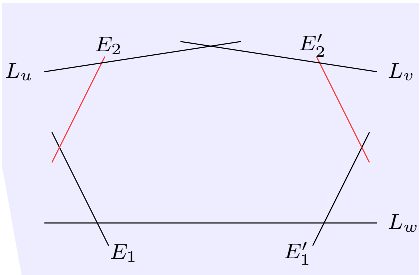
$$Uw^2 - Vuv = 0.$$

Over den affine åpne $D_+(V) \subseteq \mathbb{P}^1_k$ gjenfinner vi flaten i eksemplet ovenfor, mens fiberen i det uendelige, altså $X_\infty = \rho_X^{-1}((1;0))$ er gitt ved ligningen $w^2 = 0$ i $\mathbb{P}^2_k$. Fiberen er altså en dobbelt linje, og som divisor på formen $X_\infty = 2L$ der L betegner linjen. Man sjekker lett at $L^2 = 0$ (det følger av at $2L$ er en fiber), og L er derfor ikke eksepsjonell. Involusjonen σ kan utvides til hele den nye X, og det viser at de to nedblåsningen X_1 og X_2 av henholdsvis E_1 og E_2 er isomorfe minimale modeller. ❄

EKSEMPEL 1.4. Vi forsetter forrige eksempel, men i en noe mer global synsvinkel og interesserer oss for den rasjonale avbildningen $\phi\colon \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k$ gitt som uvw^{-2}. Den er definert overalt unntatt i punktene $x = (0;1;0)$ og $x' = (1;0;0)$. For å eliminere ubestemthetene til ϕ må vi foreta to oppblåninger i hvert av disse punktene, og slik finner vi flaten X. Den kommer utstyrt med en avbildning $\phi\colon X \to \mathbb{P}^1_k$ hvis fibre for endelige verdier av t — *i.e.*, fibre over punkter $(t;0;1) \in \mathbb{P}^1_k$ — presis er $uvw^{-2} = t$, mens fiberen over $(1;0;0)$ er på formen $2L_w + E_1 + E_1'$ der L_w betegner den propre transformen av linjen $w = 0$, og E_1 og E_1' er to disjunkte rasjonale kurver begge med selvsnitt -2 som snitter L_w enkelt i ett punkt. Disse to kurvene er de propre transformene i den andre oppblåsningen av de ekesepsjonelle fibren i den første. De eksepsjonelle i den andre oppblåsningen betegner vi med henholdsvis E_2 og E_2'. De er tegnet med rødt på figur 1.1 nedenfor, mens de to fibrene vi snakker om er tegnet med sort.

Man sjekker at divisoren L_w tilfredstiller $L_w^2 = -1$, og etter Castelnuovo-Enriques-kriteriet kan den derfor kollapses til et punkt. Den resulterende flaten Y fibreres over $\mathbb{P}^1_k$ med to singulære fibre som er laget over samme lest; de splitter begge som summen av to eksepsjonelle av første slag som skjærer hverandre enkelt i ett punkt; *i.e.*, fibrene er $E_1 + E_2$ og $E_1' + E_2'$. ❄

OPPGAVE 1.4. Vis at flaten Y er en minimal modell for X; *i.e.*, vis at de eneste eksepsjonelle kurvene av første slag er de fire som inngår i dekomposisjonen av de singulære fibrene, og at uansett rekkefølge disse blåses ned i, blir nedblåsningene isomorfe. ✷



Figur 1.1: Oppblåsingne

Elementære transformasjoner og Hirzebruch-flater

Scenebeskrivelsen i dette avsnittet er som følger: Flaten X er som vanlig regulær og fibrert over det dedekindske skjemaet S og fibrasjonen betegnes med ρ_X. Et punkt s i S skal være utpekt, og vi antar at fiberen $F = \rho_X^{-1}(s)$ er isomorf med $\mathbb{P}^1_{k(s)}$. Videre lar vi $x \in F$ være et lukket punkt på fiberen over s (som ikke nødvendigvis er rasjonalt over $k(s)$).

(1.10) Vi starter med et enkelt lemma om selvsnittet til en proper transform av en fiber, der notasjonen er som nyss beskrevet:

Lemma 1.4 *La $x \in X$ være lukket og anta at C er en effektiv Cartier-divisor som har et regulært punkt i x. La som vanlig $C^\flat$ stå for den propre transformen av C i oppblåsningen $\widetilde{X}$ av X i x. Om $(C^2) = 0$, så er $(C^\flat)^2 = -[k(x) : k(s)]$. Spesielt om x er rasjonalt over s, så er $(C^\flat)^2 = -1$.*

BEVIS: Vi har formelen

$$(C^\flat)^2 = (C)^2 - n^2[k(x) : k(s)], \tag{1.2}$$

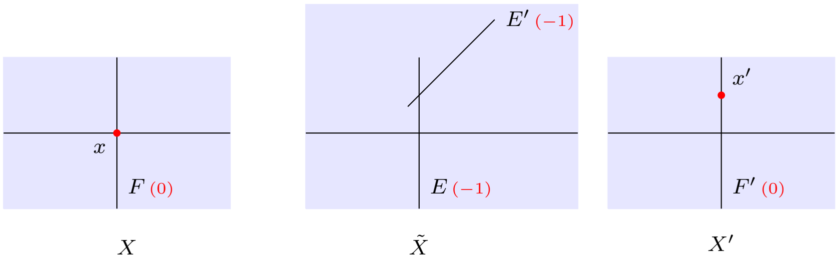
der n er multiplisiteten til C i punktet x. I vårt tilfelle er den lik én, og setter vi inn det, følger lemmaet umiddelbart. ❑

(1.11) En *elementær transfomasjon* går ut på følgende: Først blåses flaten X opp i punktet x, som må være rasjonalt over $k(s)$ der $s = \rho_X(x)$, og som kalles *senteret* til transformasjonen Den eksepsjonell divisoren betegnes med E. Den propre transformen $F^\flat$ av F omdøpes til E' (dette navnevalget kan synes absurd, men blir snart klart). Vi observerer at E' er en eksepsjonell kurve av første slag: Den er isomorf med F og derfor med den projektive linjen $\mathbb{P}^1_{k(s)}$, og selvskjæringen er som den skal være etter lemma 1.4 ovenfor. Således er fiberen F forvandlet til en eksepsjonelle kurven av første slag E'

på oppblåsningen $\widetilde{X}$. Etter Castelnuovo-Enriques-kriteriet kan derfor E' blåses ned, og vi finner en ny en flate X', som fortsatt fibreres over S. Man sjekker enkelt at bildet F' av E ned i X' utgjør fiberen over s. Kort sagt, ved en oppblåsning og en påfølgende nedblåsning, bytter vi en fiber med en ny fiber.

Vi bemerker også at prosessen er symmetrisk i X og X' i den forstand at om x' er bildet av E' ned i X', så vil X frembringes som den elementære transformasjonen av X' med sentrum i x'.

Prosessen er skjematisk illustrert i figur 1.2 nedenfor der de forskjellige selvsnittene er indikert med rødt.



Figur 1.2: En elementær transfomasjon

(1.12) Spørsmålet om X og X' er isomorfe over S er subtilt fordi det er et globalt spørsmål. I eksempel 1.2 ovenfor var X_1 og X_2 relatert med en elementær transformasjon, men de er allikevel isomorfe, og uten at vi skal gå inn på de presise detaljene, er vi konservative og sier at det eksemplet indikerer at en elementær transformasjon lokalt ikke forandrer isomorfitypen til X *lokalt*. Gode eksempler på at den forandres globalt er de såkalte Hirzebruch-flatene.

Disse står også svært sentralt i kalssifikasjonen av flater over en algebraisk lukket kropp, siden de utgjøre alle relativt minimale modeller for rasjonale flater i den situasjonen. Hirzebruch-flatene kan generaliseres til de *reglerte* flatene, altså regulære flater som er $\mathbb{P}^1_k$- fibrerte over en (vilkårlige) regulære og komplett kurve. Og blant de regulære komplette flatene over k, utgjør disse eksemplene alle relativt minimale flater som ikke er minimale. Så en flate over k som ikke er reglert, har en entydig minimala modell, og er den regleret, så er alle dens relativt minimale modeller av typen en Hirzebruch-flate.

(1.13) Hirzebruch-flatene er en familie flater $\mathbb{F}_n$ indeksert ved det naturlige tallet n—eller, for å være helt presis, snarere en familie isomorfiklasser av flater. Vi skal definere dem ved rekursjon på indeksen n. De er alle fibrert over $\mathbb{P}^1_k$ med $\mathbb{P}^1_k$ som fibre; så de er $\mathbb{P}^1_k$-bunter over $\mathbb{P}^1_k$.

Den n-te Hirzebruch-flaten $\mathbb{F}_n$ er karaktrisert ved at fibrasjonen har et tversnitt Σ_n med selvsnitt lik $-n$; eller sagt noe annerledes, det gjelder at $(\Sigma_n)^2 = -n$. Det viser seg at dette er tilrekkelig til å bevise at Hirzebruch-flater med forskjellige indekser ikke er isomorfe, setning 1.2 nedenfor.

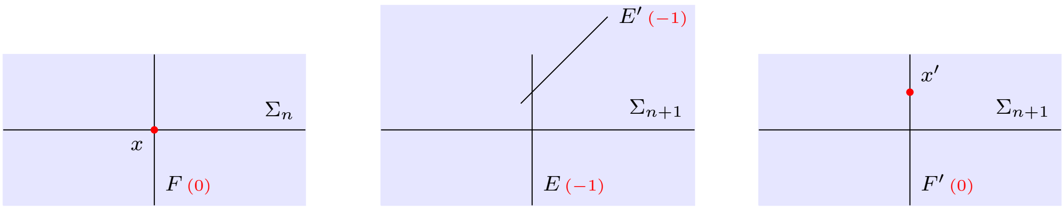
Rekursjonen begynner med å la $\mathbb{F}_0$ være produktet $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$, og la fibrasjonen være første projeksjon. Tversnittet Σ_0 er et vilkårlig tversnitt til denne. Rekursjonsregelen er rett og slett som følger: Man utfører en elementær transformasjon med sentrum i et punkt x på tversnittet Σ_n. Det gir den nye flaten $\mathbb{F}_{n+1}$, som kommer fibrert over $\mathbb{P}^1_k$.

Det nye tversnittet Σ_{n+1} er kort og godt bildet i $\mathbb{F}_{n+1}$ av den propre transformen av Σ_n. Nå er $(\Sigma_n^\flat.E') = 0$ siden et tversnitt aldri er tangent til en fiber, og derfor vil ikke nedblåsningen affekture $\Sigma_n^\flat$.

$$(\Sigma_{n+1})^2 = (\Sigma_n^\flat)^2 = (\Sigma_n)^2 - 1 = -(n+1),$$

som er det vi vil ha.

Velger man derimot et punkt x' som *ikke* ligger på tversnittet Σ_n og utfører en elementær transformasjon, finner man en flate med et tversnitt som har selvnitt $-(n-1)$. Ved en elementær transformasjon beveger man seg opp eller ned i hierarkiet av Hirzebruch-flater etter som sentret for transformasjonen ligger på eller uten forden negative seksjonen.



Figur 1.3: Rekursjonssteget i konstruksjonen av Hirzebruch-flater.

Neron-Severi-gruppen til Hirzebruch-flater

(1.14) Til å begynne med arbeider vi i en helt generell situasjon med X en flate, $x \in X$ et lukket punkt og $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ oppblåsningen av X i x. Vi skal etablerer en sterk sammenheng mellom gruppene $\operatorname{Num} X$ og $\operatorname{Num} \widetilde{X}$ av divisorer modulo numerisk ekvivalens, men først minner vi om at oppblåsningsavbildningen π induserer en additiv avbildning $\pi^*\colon \operatorname{Num} X \to \operatorname{Num} \widetilde{X}$ som respekterer snittformene. Det vil si at $(\pi^* B, \pi^* B') = (B, B')$ for et hvert par av divisorer B og B' på X. En umiddelbar følge av dette er at π^* er injektiv.

Setning 1.1 *La $\widetilde{X}$ være oppblåsningen av X i x og la π betegne oppblåsningsavbildningen og E den eksepsjonelle divisoren. Da har vi en naturlig oppslitting i en direkte sum*

$$\operatorname{Num} \widetilde{X} = \pi^* \operatorname{Num} X \oplus E\mathbb{Z}.$$

Mer presist gjelder det at $\pi^* \operatorname{Num} X$ det ortogonale komplentet til E; i.e., en klasse $\alpha \in \operatorname{Num} \widetilde{X}$ er på formen $\pi^*\beta$ hvis og bare hvis $(\alpha, E) = 0$.

Bevis: Som sedvanlig er den ene veien enklere enn den andre. La B være en divisor på X med tilhørende invertibelt knippe L. Restrisjonen L triviell på en omegn U om x. Snitttallet $(\pi^* B, E)$ er *per definisjon* lik $\deg \pi^* L|_E$, men $L|_E = \mathcal{O}_E$ siden $L|_U = \mathcal{O}_U$, og derfor er $\deg \pi^* L|_E = 0$.

Omvendt, la klassen $\alpha \in \operatorname{Num} \widetilde{X}$ stå ortogonalt på E. Klassen α er representert ved en divisor $\sum_i a_i A_i + rE$ der A_i-ene er effektive, irredusible divisorer som er forskjellige fra den eksepsjonelle divisoren E. Det er klart at $A_i = B_i^\flat$ der $B_i \subseteq X$ er den effektive, irredusible divisoren $\pi(A_i)$. Således har vi, om n_i betegner multiplisiteten til B_i i x, at $A_i = \pi^* B_i - n_i E$. At α står ortogonalt på E, er ensbetydende med at

$$\sum_i a_i (A_i, E) + r(E, E) = 0. \tag{1.3}$$

Nå vet vi at $A_i = B_i^\flat = \pi^* B_i - n_i E$, og siden $(\pi^* B_i, E) = 0$, er $(A_i, E) = -n_i(E, E)$. I lyset av ligning 1.3 gir det at

$$-\sum_i a_i n_i + r = 0.$$

Vi finner

$$\alpha - \pi^* \beta = \sum_i a_i A_i + rE - \sum_i \pi^* B_i = -\sum_i a_i n_i E + rE = 0,$$

der β er klassen på X representert ved $\sum_i B_i$. ❑

(1.15) Vi går så løs på vårt hovedanliggende i denne paragrafen, sammenhengen mellom gruppene $\operatorname{Num} X$ og $\operatorname{Num} \widetilde{X}$:

Setning 1.2 *Neron-Severi-gruppen* $\operatorname{Num} \mathbb{F}_n$ *er en fri abelsk gruppe av rang to som er generert av klassene til en fiber* F_n *og tversnittet* Σ_n*, i.e., vi skriver kort* $\operatorname{Num} \mathbb{F}_n = F_n \mathbb{Z} \oplus \Sigma_n \mathbb{Z}$.

Bevis: Vi lar $\pi \colon Y \to \mathbb{F}_n$, med eksepsjonell fiber E, og $\pi' \colon Y \to \mathbb{F}_{n+1}$ med eksepsjonell fiber E', være de to oppblåsningsavbildningene. Vi har at $\pi^* F_n = E + E' = {\pi^*}' F_{n+1}$ og ${\pi^*}' \Sigma_{n+1} = \Sigma_n^\flat$. Ved induksjon på n kan vi anta at $\operatorname{Num} \mathbb{F}_n = \Sigma_n \mathbb{Z} \oplus F_n \mathbb{Z}$. Ved å bruke setning 1.1 ovenfor finner vi

$$\operatorname{Num} Y = \pi^* \operatorname{Num} \mathbb{F}_n \oplus E\mathbb{Z} = (\Sigma_n^\flat + E)\mathbb{Z} \oplus (E + E')\mathbb{Z} \oplus E\mathbb{Z}.$$

På den annen side er Y også oppblåsningen av $\mathbb{F}_{n+1}$, og igjen etter setning 1.1 vet vi da at $\operatorname{Num} \mathbb{F}_{n+1}$ er det ortogonale komplementet til E'. For å bestemme dette ser vi på

$$(E', a(\Sigma_n^\flat + E) + b(E + E') + cE) = a + c = 0$$

slik at det ortogonale komplementet presis er klassene på formen

$$a\Sigma_n^\flat + bF = a{\pi^*}' \Sigma_{n+1} + bF.$$

❑

Effektive divisorer på $\mathbb{F}_n$

Setning 1.3 *Anta at C er en effektiv og irredusibel divisor på $\mathbb{F}_n$ som hverken er lik en fiber eller lik tversnittet Σ_n. Da er $(C)^2 \geq n$.*

BEVIS: La $C = aF + b\Sigma_n$ der a og b er hele tall. Da er $b = (C, F) > 0$ og $(C, \Sigma_n) = a - nb \geq 0$, og følgelig er

$$(C)^2 = (aF + b\Sigma_n)^2 = 2ab - b^2 n = b(2a - bn) \geq ab \geq nb^2 \geq n.$$

❑

Korollar 1.1 *Dersom $n \neq 1$, så er $\mathbb{F}_n$ reltaivt minimal.*

Korollar 1.2 *Dersom $\mathbb{F}_n \simeq \mathbb{F}_m$, så er $n = m$.*

BEVIS: Den eneste irredusible kurven på $\mathbb{F}_n$ (henholdsvis $\mathbb{F}_m$) med negativt selvsnitt er Σ_n (henholdsvis $\mathbb{F}_m$), så om $\theta \colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ er en isomorfi, er $\theta(\Sigma_n) = \Sigma_m$. Det følger at $n = m$ siden selvsnitt bevares under en isomorfi. ❑

(1.16) *A priori* kan det virke som om Hirzebruch-flaten $\mathbb{F}_{n+1}$ avhenger av valget av senteret $x \in \Sigma_n$ for den elementære transformasjonen, og ikke bare av det siste senteret, men av alle de $n-1$ foregående. Det er mirakuløst nok ikke tilfellet, alle valg av sentert gir isomorfe flater, til og med isomomorfe fibrasjoner. Dette henger på de sterke homogenitetsegenskapene til den projektive linjen.

Setning 1.4 *La X_i for $i = 1, 2$ være to regulær, propre flater over k utstyrt med projektive og flate fibrasjoner $\rho_{X_i} \colon X_i \to \mathbb{P}^1_k$ hvis lukkede fibre alle er isomorfe med $\mathbb{P}^1_k$. La $F_i \subseteq X_i$ være to lukkede fibre. Anta videre at hver ρ_{X_i} har et tversnitt Σ_i med $(\Sigma_i)^2 = -n$. Da finnes det en isomorfi $\theta \colon X_1 \simeq X_2$ som sender F_1 på F_2 og en automorfi $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})^1_k$ slik at $\beta \circ \rho_{X_1} = \rho_{X_2} \circ \theta$. Spesielt er hver X_i isomorf med en Hirzebruch-flate $\mathbb{F}_n$ med indeks n.*

BEVIS: Beviset går ved induksjon på n, og vi antar først at $n > 0$. Velg et lukkede punkter $x_i \notin \Sigma_i$ og utfør en elementære transformasjoner med sentrum i x_i. Da vil de nye flatene X'_i fortsatt være fibrert over $\mathbb{P}^1_k$ med alle fibre ismorfe med $\mathbb{P}^1_k$, og de vil begge ha et tversnitt Σ'_i med $(\Sigma'_i)^2 = -n + 1$. Fibren i X'_i som tilsvarer F_i betegner vi med F'_i, og punktene tilsvarende x_i betegner vi naturlig nok med x'_i. De induserte fibrasjonene $X'_i \to \mathbb{P}^1_k$ kaller vi ρ'_{X_i}.

Ved induksjon finnes det en isomorfi $\theta' \colon X'_1 \simeq X'_2$ som sender fiberen F'_1 til F'_2 og en $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_k)$ slik at $\beta \circ \rho'_{X_1} = \rho'_{X_2} \circ \theta'$. Dersom $n \geq 2$, er Σ'_i den eneste effektive divisoren med selvsnitt $-(n-1)$, så derfor er $\theta'(\Sigma'_1) = \Sigma'_2$. Følgelig er $\theta(x'_1) = x'_2$. Siden X_i er den elementære transformasjonen av X'_i med sentrum i x'_i, vil θ' derfor indusere en isomorfi $\theta \colon X_1 \to X_2$ med de ønskede egenskapene.

Er $n = 1$, trenger vi et tilleggsargument, da er ikke seksjonenen Σ_i' entydige lenger, men til gjengjeld er $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ homogent. Velg først isomorfier mellom X_i' og $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$, la F_i tilsvare $\{t_i\} \times \mathbb{P}_k^1$ og la x_i tilsvare (t_i, s_i). Nå finnes det automorfier $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})_k^1$ slik at $\alpha(t_1) = t_2$ og $\beta(s_1) = s_2$. Da vil produktet $\alpha \times \beta$ være en automorfi $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ slik vi søker, *i.e.*, som sender (t_1, s_1) på (t_2, s_2), og satt sammen med isomorfiene mellom X_i og $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$, gir den en θ slik vi vil ha.

Tilfellet $n = 0$ krever noe videre innsats, det gjenstår å vise at X_i er isomorf med $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. Først av alt, så er $\rho_{X*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}$ siden ρ_X har sammenhengende fibre, og Nakayamas lemma gir oss at $R^1\rho_{X*}\mathcal{O}_X = 0$. Således er $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Tar vi globalseksjoner av den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma \longrightarrow 0$$

finner vi den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(\Sigma)) \longrightarrow H^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma) \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Den viser oss for det første at $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(\Sigma)) = 2$, men også at knippet $\mathcal{O}_X(\Sigma)$ er generert av sine globale seksjoner. I punkter som ikke ligger på Σ er dette soleklart, (der forsvinner jo ikke seksjonen som definerer Σ), mens følgen 1.4 medfører at den konstante seksjonen 1 på Σ kan utvides til en globalseksjon, og den forsvinner jo ikke langs Σ.

Knippet $\mathcal{O}_X(\Sigma)$ definerer således en avbildning $\psi\colon X \to \mathbb{P}_k^1$. Sammen med den opprinnelige fibrasjonen ρ_X gir denne oss en avbildning $\phi = \rho_X \times \psi\colon X \to \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$.

Fiberen til ϕ over et lukket punkt (s, t) er gitt som snittet $\rho_X^{-1}(s) \cap \psi^{-1}(t)$, og siden skjæringstallet $(F, \Sigma) = 1$, består denne fiberen (til og med skjemateoretisk) at ett punkt. De viser at ϕ er injektiv, og den surjektiv siden X er proper og irredusibel av dimensjon to. ❑

(1.17) Dersom man studerer fibrasjoner over en regulær kurve C med $\mathbb{P}_k^1$ som fibre, kan man gjøre en god del av de samme tingene som i forrige paragraf. Man kan starte med produktet $\mathbb{P}_k^1 \times C$ og suksessivt utføre elementære transformasjon og slik får man en familie fibrasjoner $\rho_n\colon X_n \to C$ som har et tverrsnitt Σ med $\Sigma^2 = -n$.

Om C er av genus to eller mer, mister man imidlertid homogenitetsegenskapene, og isomorfiklassen til flatene X_n avhenger av de valgene man gjør underveis i konstruksjonen. Er basiskurven C elliptisk, vil setning 1.4 fortsatt være gyldig.

Fibrasjoner med ikke-rasjonale fibre

Vi begynner med følgende enkle lemma:

Lemma 1.5 *En minimal modell for X er entydig dersom de forskjellige eksepsjonelle kurvene av første slag som ligger på X er disjunkte.*

Bevis: Vi skal bruke nedstigende induksjon på antall eksepsjonelle kurver på X. Anta at $\phi\colon X \to Y$ og $\phi'\colon X \to Y'$ er to birasjonale, regulærer avbildning med både Y og Y' relativt minimale.

Etter faktoriseringsteoremer er de begge en sammensetning av oppblåsninger. La $\phi_i\colon X_i \to X_{i+1}$ være dem hvis komposisjon er ϕ, *i.e.*, vi har at $X_1 = X$ og $X_r = Y$ og

$$\phi = \phi_r \circ \phi_{r-1} \circ \cdots \circ \phi_1.$$

La vider $\phi_1' : X \to X'$ være den første nedblåsningen i en tilsvarende dekomposisjon av ϕ', slik at $\phi' = \phi'' \circ \phi_{1'}$ med $\phi''\colon X' \to Y'$ birasjonal og regulær. La E være den eksepsjonelle fiberen til ϕ'.

Lemma 1.6 *For en i med $1 \le i \le r$ er $\phi_i \circ \cdots \circ \phi_1(E)$ et punkt.*

Bevis: Vi bruker nedstigende induksjone på antall eksepsjonelle kurver av første slag. Om E er forskjellig fra den eksepsjonelle fiberen til ϕ_1, er E disjunkt fra denne, og derfor er $\phi_1(E)$ en eksepsjonell kurve av første slag på X_1. Ved induksjon er $\phi_i \circ \cdots \circ \phi_2(\phi_1(E))$ et punkt for passende i. ❏

Det følger at bildet av E i Y' er et punkt, og derfor faktoriserer ϕ' gjennom X_1, *i.e.*, $\phi' = \psi' \circ \phi_1$. I diagrams form er situasjonen

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\phi_1"] & \\ & X_1 \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ Y & & Y' \end{tikzcd}$$

der $\psi = \phi_r \circ \phi_{r-1} \circ \cdots \circ \phi_2$, og vi er i land ved induksjon. ❏

(1.18) Hovedteoremet i dette avsnittet er, som annonsert i tittelen, at om $X \to S$ er en fibrasjon hvis fibre ikke er rasjonale, så har X en entydig minimal modell over S.

Teorem 1.2 *La $\rho_X\colon X \to S$ være en fibrasjon over en dedekindsk basis S. Anta at de genrelle fibrene til ρ_X er av genus én eller mer. Da har X kun endelig mange eksepsjonelle kurver av første slag over S som er parvis disjunkte, og derfor har X en entydig minimal modell.*

Vi starter med å bemerke at hypotesen om at de generelle fibrene er av genus én eller mer betyr at $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \neq 0$ for s med i en åpen og tett undermengde av S. Dette er ekvivalent med at $H^1(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) \neq 0$ for fiberen X_η over det genriske punktet $\eta \in S$.

Beviset for teoremet utgjøres av en sekvens av tre lemmaer som nå følger. Det første er i en viss forstand omvending av lemma 1.2 på side 3 om fibre som splitter på en særskilt måte.

Lemma 1.7 *La E_1 og E_2 er to eksepsjonelle kurver over S av første slag på X. Anta at E_1 og E_2 har et ikke-trivielt snitt. Da gelder følgende to utsagn:*

1. *Et multiplum av $(E_1 + E_2)$ er en fiber, i.e., $a(E_1 + E_2) = F$ for en fiber F og for et naturlig tall a.*

2. *Vi har at $H^0(E_1, \mathcal{O}_{E_1}) = H^0(E_1, \mathcal{O}_{E_1})$, og kurvene E_1 og E_2 er begge isomorfe med den projektive linjen $\mathbb{P}^1_k$, der k er kroppen $k = H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i})$.*

3. *Divisorene E_1 og E_2 snitter i ett punkt x som er rasjonalt over k.*

BEVIS: De forskjellige fibrene til ρ_X er disjunkte så E_1 og E_2 ligge i en og samme fiber $F = \rho^{-1}(s)$. Teorem 1.3 nedenfor på side 19 om negativ bestemthet forteller oss at $(E_1 + E_2)^2 \le 0$, og at likhet gjelder hvis
og bare hvis $a(E_1 + E_2) = F$ for et naturlig tall a.

Kurvene E_i er eksepsjonelle av første slag så vi har *per hypotese* isomorfier $E_1 \simeq \mathbb{P}^1_{k_1}$ og $E_2 \simeq \mathbb{P}^1_{k_2}$ for (*a priori* forskjellige) kropper k_1 og k_2. De to selvsnittene tilfredstiller $E_i^2 = -[k_i : k(s)]$. Dette gir

$$(E_1 + E_2)^2 = -[k_1, k(s)] + 2(E_1, E_2) - [k_2 : k(s)] \le 0, \tag{1.5}$$

og dermed er

$$(E_1, E_2) \le \max_i [k_i : k(s)].$$

På den annen side er jo $E_1 \cap E_2$ et ikke-tomt lukket underskjema av $\mathbb{P}^1_{k_i}$, og derfor er

$$(E_1, E_2) = \sum_{x \in E_1 \cap E_2} [k(x) : k(s)] \operatorname{length} \mathcal{O}_{E_1 \cap E_2, x} \ge [k_i : k(s)],$$

siden $k_i \subseteq k(x)$ for alle lukkede punkter $x \in \mathbb{P}^1_{k_i}$. Det følger at $(E_1, E_2) = \max_i [k_i : k(s)]$. Setter vi dette inn i ulikheten 1.5 finner vi at $[k_1 : k(s)] = [k_2 : k(s)]$, og dermed er $k_i = k(x)$ og $(E_1 + E_2)^2 = 0$. Sett i lyset av teorem 1.3 om negativ bestemthet på side 1.3 medfører den siste likheten at $F = a(E_1 + E_2)$ for et naturlig tall a. ❑

I de to neste lemmaene betegner E_1 og E_2 to eksepsjonelle kurver av første slag med et ikke-tomt snitt. Etter lemma 1.7 ovenfor er $E_1 \cap E_2 = \{x\}$ og $H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = k(x)$. Vi lar $s_0 = \rho_X(x)$, og igjen etter lemma 1.7 er fiberen F over s_0 gitt som $F = X_{s_0} = a(E_1 + E_2)$ for et naturlig tall a.

Lemma 1.8 *Dersom $F = a(E_1 + E_2)$ for et naturlig tall a, så er $H^1(F, \mathcal{O}_F) = 0$.*

BEVIS: Siden $E_1 \cap E_2 = \{x\}$ skjemateoretisk, er $\mathcal{O}_{E_1 \cap E_2} = k(x)$, og det kinesiske restteoremet gir oss følgende eksakte følge der $E = E_1 + E_2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_{E_1} \oplus \mathcal{O}_{E_2} \longrightarrow k(x) \longrightarrow 0.$$

Denne følgen medfører via den langeksakte kohomologifølgen at $H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$ siden $H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = k(x)$ så restriksjonsavbildningene $H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) \to k(x)$ er surjektive. Vi vet at det invertible knippet $\mathcal{O}_E(aE)$ er trivielt fordi aE er en fiber, men nå er Picard-gruppen til E torsjonsfri, og defor er også $\mathcal{O}_X(E)|_E = \mathcal{O}_E$. For hvert naturlige tall b har vi således den korteksakte følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_{(b+1)E} \longrightarrow \mathcal{O}_{bE} \longrightarrow 0,$$

som gir den ekakte følgen

$$H^1(E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_{(b+1)E}) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_{bE}).$$

Ved induksjon på b følger det at $H^1(E, \mathcal{O}_{bE}) = 0$ for alle b, og spesielt er derfor $H^1(E, \mathcal{O}_{aE}) = 0$. ❑

Lemma 1.9 *Vi har at $(R^1\rho_{X*}\mathcal{O}_X)_{s_0} = 0$. Følgelig er $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$ for nesten alle fibre X_s (ikke nødvendigvis lukkede), og X er en fibrasjon med rasjonale fibre.*

BEVIS: Det finnes meget kraftfulle teoremer til bruk for å se hvordan høyere dirkete bilder oppfører seg under basisforandring. Vi skal ta benyttes oss av den aller enkleste formen. Anta at $S = \operatorname{Spec} R$ der R er en dedekindsk ring med kvotientkropp K. La t være en uniformiserende parameter i punktet s_0 med maksimalt ideal $\mathfrak{m}$. Fiberen over s_0 er fiber $a(E_1 + E_2)$. Da X er flat over S gir multiplikasjon med t oss den eksakte følgen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\ t\ } \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0,$$

og dermed finner vi den eksakte følgen

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\ t\ } H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_F) \longrightarrow 0.$$

Siden $H^1(\mathcal{O}_F) = 0$ etter lemma 1.8 ovenfor er derfor multiplikasjon med t surjektiv. Nå er ρ_X en proper avbildning så $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ er en endelig generert R-modul. Nakayamas lemma gir at lokaliseringen $H^1(X, \mathcal{O}_X)_{\mathfrak{m}} = 0$. Derfor er støtten til $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ en lukket og ekte undermengde av S (den består av endelig mange lukkede punkter). For lukkede punkter s som ligger i komplementet til denne, må $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$, noe som *mutatis mutandis* er en konsekvens av eksakte følger tilsvarende dem vi nettopp brukte.

For det generiske punktet η i S appelerer vi til teoremet om "flat basisforandring" og finner $H^1(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes_R K = 0$.t ❑

Fra disse lemmane følger det umiddelbart at dersom $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \neq 0$, så er de eksepsjonelle kurvene av første slag som ligger på X parvis disjunkte, og etter xxx har derfor X en entydig minimal modell, og teorem 1.2 er bevist.

Topologisk

Over de komoplekse tallene er det naturlig å spørre seg hvordan topologien forandre seg i en elementær transformasjon. Topologisk er den jo en kirurgisk operasjon som kan beskrives som følger. Normalbunten til en fiber F er triviell, slik er det alltid med regulære fibre. Det betyr at siden F er lik $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2$ har fiberen F en tubulær, åpen omegne U hvis tillukning $\overline{U}$ er diffeomorf med $\Delta \times \mathbb{S}^2$, der Δ er enhetsdisken i $\mathbb{C}$. Randen til $\overline{U}$ oppfyller da $\partial\overline{U} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Komplementet $\mathbb{F}_n \setminus U$ har samme rand. Hvis vi limer inn $\overline{U}$ ved å identifisere rendene på en annen måte, nemlig ved automorfien $\mathrm{id} \times \alpha\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ der $\alpha\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ er antipodal avbildningen.

Snittformen

Dersom $n = 2m$ er snittformen jevn, vi har nemlig at

$$(af + b\sigma)^2 = 2a - 2mb^2$$

mens om $n = 2m + 1$ er den odde soden jo $\sigma^2 = -2m + 1$. Det viser at om n og m er av forskjelloig paritet, så er $\mathbb{F}_n$ og $\mathbb{F}_m$ er diffeomorfe hvis og bare hvis n og m er av samme paritet.

$mF + \sigma_{2m}$ og f en basis for N med matris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er derimot $n = 2m + 1$

Et lemma om negativ bestemthet

Anta at L er et vektorrom av endelig rang over $\mathbb{Q}$ som utstyrt med en symmetrisk bilineær form som vi skriver $v \cdot w$; en slik struktur kalles også en *kvadratisk form*.

I våre anvendenlser vil L også ha en heltallig struktur. Det betyr at vi har en fri abelsk gruppe av endedlig rang N utstyrt med en biadditiv form slik at $L = N_Q = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ og formen på $N_{\mathbb{Q}}$ er indusert av den på N. Typiske ekempler i vår verden er snittformen på en fiber til en proper strukturavbildningen $\rho_X\colon X \to S$ der X er en re Vi minner om at den kvadratiske formen sies å være *definit* eller *bestemt* dersom $v \cdot v = 0$ medfører at $v = 0$. Den er *negativt definit* eller *negativt bestemt* dersom $v \cdot v < 0$ for alle vektor v forskjellig fra null — ditto for *positivt bestemt*. Den er *negativt semidefinit* eller *delvis negativt bestemt* om $v \cdot v \leq 0$ for alle v.

(1.19) Vi lar $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ betegne et sett av generatorer for L (det kan selvsagt gjerne være en basis), og vi lar $a_{ij} = \gamma_i \cdot \gamma_j$. Da er a_{ij} elementene i en symmetrisk matrise.

EKSEMPEL 1.5. La oss se på snittformen på $N = \operatorname{div}{}_s X$til en fiber over s som består to eksepsjonelle kurver av første slag som snitter i ett punkt rasjonalt over $k(s)$. La klassene deres være e_1 og e_2. De danner en basis for L og snittmatrisen er

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ser vi på de to elementene $\gamma_1 = e_1 + e_2$ og $\gamma_2 = e_1 - e_2$ generer de ikke hele N over $\mathbb{Z}$, men en undergruppe av indeks to. La oss kalle den M. Snittformen deres blir gitt ved matrisen

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begge formen er delvis negativt bestemte. De er selvsagt isometriske over $\mathbb{Q}$, men $\mathbb{Z}$ er de ikke ekvivalende. For M er det slik at alle $v \cdot w$ er jevne tall, mens dette ikke er riktig for N. Vi sier at formen på M er en *jevn form*, mens den på N er *odde*.

❄

(1.20) Elementene γ_i i L skal oppfylle tre antagelser som er grunnleggende for fortsettelsen og som har sin opprinnelse i vår geometriske situasjon; de tilsvarer *grosso modo* de irredusible komponentene i en spesifikk fiber til en fibrasjon, riktignok skalert av bekvemmelighetshensyn:

- ☐ La $f = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r$; da skal $f \cdot \gamma_i = 0$ for $1 \le i \le r$.
- ☐ Dersom $i \ne j$, gjelder det at $a_{ij} = \gamma_i \cdot \gamma_j \ge 0$.
- ☐ Gitt to forskjellige indekser i og j. Da finnes en følge $i_0, \ldots, i_r$ av forskjellige indekser med $i_0 = i$ og $i_r = k$ som er slik at $\gamma_{i_k} \cdot \gamma_{i_{k+1}} > 0$ for $0 \le k < r$.

En ummiddelbar følge av den første antaglesen er at $f^2 = 0$, for vi har jo at $f \cdot f = \sum_i f \cdot \gamma_i = 0$. Det er også klart at i fall det er minst er to ledd i uttrykket for f, altså dersom $r \ge 2$, så er $\gamma_i \cdot \gamma_i < 0$. Vi har nemlig at

$$0 = f \cdot \gamma_i = \gamma_i \cdot \gamma_i + \sum_{j \ne i} \gamma_j \cdot \gamma_i, \tag{1.6}$$

der den siste summen er positiv. Men det gjelder mer generelt at formen er delvis negativt bestemt på L:

Lemma 1.10 *Med notatasjon og antagelser som ovenfor har vi at $v \cdot v \le 0$ med likhet hvis og bare hvis $v = \alpha f$ for et rasjonalt tall $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Bevis: La $v = \sum_i x_i \gamma_i$. For hver indeks i gjelder det at $a_{ii} = -\sum_{j \ne i} a_{ij}$ (som rette og slett er en omskrivning av 1.6) slik at vi finner

$$v \cdot v = \sum_{i \ne j} x_i x_j a_{ij} + \sum_i a_{ii} x_i^2 = \sum_{i \ne j} x_i x_j a_{ij} - \sum_{i \ne j} a_{ij} x_i^2 = -1/2 \sum_{i \ne j} a_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

Da $a_{ij} \geq 0$ om i og j er forskjellige indekser — den andre grunnleggende antagelsen sier presis det — er alle ledd i den siste summen ikke-positive, så summen er ikke-positiv, og $v \cdot v \leq 0$. Er summen null, må alle leddene forsvinne, og siden det etter den siste antagelsen finnes en kjede $\{i_k\}_k$ av indekser fra i til j med $a_{i_k i_{k+1}} > 0$ for hver k, følger det at $x_i = x_j$. Dermed er $v = \alpha f$ der α betegner den felles verdien x_i-ene har. ❑

(1.21) Vi anvender nå lemma på vår geometriske situasjon der $\rho_X \colon X \to S$ en fibrasjon der X er en regulær flate og S et dedekindsk skjema. Vi lar $s \in S$ være et punkt og betegner de irredusible komponentene til fiberen $X_s = \rho_X^{-1}(s)$ med $\Gamma_i, \ldots, \Gamma_r$.

På rommet $\operatorname{div}_s X$ bestående av Cartier-divisorer med støtte langs X_s har vi definert en skjæringsform, som har en naturlig forlengelse til vekorrommet $L = \operatorname{div}_s X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Fiberen til $F = X_s$ er en Cartier-divisor og klassen i $\operatorname{div}_s X$ betegner vi med f. Den kan skrives som en lineær kombinasjon

$$f = \sum_i d_i \Gamma_i = \sum_i \gamma_i$$

der d_i alle er positive hele tall, og der vi har skrevet $\gamma_i = d_i \Gamma_i$.

Ligningen for F er tilbaketrekningen $\rho_X^\sharp(t)$ av er en uniformisernede parameter t for S i punktet s. Det betyr at det invertible knippet $\mathcal{O}_X(F)$ er trivielt på en omegen om F, og således er $(F, \Gamma_i) = 0$, og altså $(f, \gamma_i) = 0$.

Dersom $i \neq j$ er jo Γ_i og Γ_j to forskjellige irredusible kutrver på X, og de har derfor et positivt skjæringstall. Det betyr at $\gamma_i \cdot \gamma_j \geq 0$.

Dersom nå F er sammenhengene må også den tredje antagelsen være oppfyllt. Dermed har vi

Teorem 1.3 *Anta at $\rho_X \colon X \to S$ er en fibrasjon der X er en regulær flate og S et dedekindsk skjema. La $s \in S$ være et lukket punkt og anta at fiberen $\rho_X^{-1}(s)$ er sammenhengende. Om $E \in \operatorname{div}_s X$ så er $(E^2) \leq 0$ med likhet hvis og bare hvis $aE = bF$ for positive heltall a og b.*

OPPGAVE 1.5. Vis at dersom fiberen ikke er sammenhengded, så gjelder dte fortsatt at $(E^2) \leq 0$ om $E \in \operatorname{div}_s X$. Vis også at $(E^2) = 0$ hvis og bare hvis E er en rasjonal lineær kombinasjon av sammenhengskomponentene til fiberen. ✷

Snittformene på Hirzebruchflater

De effektive og positive kjeglene

La X betegne en flate (som altså er komplett og regulær) over kroppen k. Vi minner om at X kan tilordnes gruppen $\operatorname{Num} X$ av divisorer på X modulo numerisk ekvivalens. To divisorer D og D' sies å være *numerisk ekvivalente* dersom $D \cdot A = D' \cdot A$ for alle divisorer A på X. Hvis vi lar $\operatorname{div}_0 X$ betgene undergruppen av divisorgruppen av de divisorene som *numerisk ekvivalent til null*, altså de tilfredstiler at $D \cdot A = 0$ for $A \in \operatorname{div} X$, så er $\operatorname{Num} X = \operatorname{div} X / \operatorname{div}_0 X$. At snitt-tallet $D \cdot A$ kun avhenger av den lineære ekvivalenslklassen til D, innebærere at lineært ekvivalente divisorer er numerisk ekvivalente.

Det er klar at $\operatorname{Num} X$ er torsjonsfri, for om $nD \cdot A =$, så er selvsagt også $D \cdot A$. Gruppen $\operatorname{Num} X$ er nær beslektet med en annen gruppe nemlig den såkalte *Neron-Severi-gruppen* $\operatorname{NS} X$ til X. Denne gruppen fanger også opp eventuell torsion som Picard-gruppen $\operatorname{Pic} X$ måtte ha, og det er slik at $\operatorname{Num} X$ er lik Neron-Severi-gruppen modulo torsjonselementene dens. For enkelte klasser flater, *e.g.,* de rasjonale, faller de to gruppene sammen — det skjer for uten torjon i Picard-gruppen.

Ey berømt teorem, bevist først av Severi for varieteter over de komplekse tallene og senere generalisert av Neron, sier at Neron-Severi-gruppen er endeglog generert. Det betyr at $\operatorname{Num} X$ også er endelig generert og siden den er fri for torsjon, er den den fri abelsk gruppe av endelig rang. Kan rangen $\rho(X)$ kalles ofte for *Picard-tallet* til X.

Vi skal i de følgende være presise, og prøve å skille mellom divisorer D deres numeriske ekvivalensklasser som vi skal betegne med små bokstaver (i seriøse typograiske kretser omtalt som *minuskler* eller *gemener*) d.

(1.22) Neron-Serveri-gruppen $\operatorname{Num} X$ kommer utstyrt med snittformen $d \cdot d'$ definert som snittet (D, D') av divisorene D og D' på X der D og D' representerer henholdsvis klassene d og d'.

Snittformen er en kvadratisk form, og som sådan har den et eget liv. Det finnes en egen teori og en klassifikasjon (iallefall av enkelte typer) av slike kvadratiske former på fri abelske grupper. Og det er lett å finne eksempler på flater som ikke er isomorfe, men har isometriske snittformer. For eksempel gjelder dette Hirzebruch-flatene To slike $\mathbb{F}_n$ og $\mathbb{F}_m$ har isometriske former såfremt n og m har samme paritet.

(1.23) Inni $\operatorname{Num} X$ ligger kjeglen $P(X)$ bestående av klassene med positivt sevsnitt; det vil si at $P(X)$ er gitt som

$$P(X) = \{\, c \in \operatorname{Num} X \mid c^2 > 0 \,\}.$$

Denne kjeglen kommer også i en lukket variant hvis elementer er de c med $c^2 \geq 0$. Vi har også *null-kjeglen* $P_0(X)$ som utgjøres av klassene med $c^2 = 0$. Disse kjeglene er definert kun ved hjelp av snittformen, så de er uavhengig av geometrien til X. De vil være de samme for to flater med isometriske snittformer.

(1.24) Det som binder $\operatorname{Num} X$ til geometrien er et par tilleggsstruktur. Vi har edn *effektive kjeglen*, det er undermengden $E(X)$ av $\operatorname{Num} X$ bestående av de *effektive* klassene; det vil si de klassene a slik at a kan representers ved en (ikke nødvendigvis redusert eller irredusibel) kurve. Og vi har også den *positive kjeglen* $C(X)$ som i en viss forstand er dualtil $E(X)$. Den er definert som

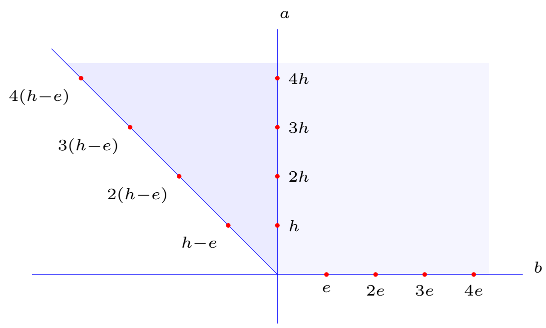
$$C(X) = \{\, d \mid d \cdot c \geq 0 \text{ for alle } c \in EX \,\}$$

Det er med andre ord de divisorklassene som snitter alle effektive kurver ikke-negativt.

EKSEMPEL 1.6. For å illustrere disse begrepene ser vi på flaten X som er det projektive planet $\mathbb{P}^2_k$ oppblåst i ett punkt p — som ikke er noe annet enn Hirzebruch-flaten $\mathbb{F}_1$. Da er gruppen $\operatorname{Num} X$ en fri abelsk gruppe av rang to, og som basis kan vi bruke klassene h og e, der h er tilbaketrekningen av klassen til en linje i $\mathbb{P}^2_k$, og e betegner klassen til den eksepsjonelle divisoren E. De danner en ortonormal basis for $\operatorname{Num} X$, og deres kvadrater er $h^2 = 1$ og $e^2 = -1$. Vi har en pensel av linjer gjennom punktet p, hvis propre transform er en pensel på X med klasse $h - e$. Det betyr at $h - e$ snitter alle effektive klasser ikke-negativt. Til å begynne med beskriver vi den effektive kjeglen. Vi har

$$
\begin{aligned}
(ah + be) \cdot h &= a \\
(ah + be) \cdot e &= -b \\
(ah + be) \cdot (h - e) &= a + b.
\end{aligned}
$$

Det betyr at dersom $c = ah + be$ er en effektiv klasse, så er $a + b \geq 0$ og $a \geq 0$. Og det er lett å sjekke at disse er alle effektive. Den effektive kjeglen er tegnet med blått på figuren, den er utspent av klassene $h - e$ og e.



Figur 1.4: $\operatorname{Num} X$

Så til den positive kjeglen: Siden den effektive kjeglen er utspent av e og $h - e$ ligger en klasse c i den positive kjeglen hvis og bare hvis $c \cdot e \geq 0$ og $(h - e) \cdot c \geq 0$. Det vil si at c ligger over linjene $a + b = 0$ og i det venstre halvplanet, siden $e^2 = -1$. Det området er indikert med en mørkere blå farge på figuren. ❋

EKSEMPEL 1.7.

Dkan være instruktivt å å gjøre en tilsvarende analyse for en Hirzebruch-flat $\mathbb{F}_n$ der n er et odde tall, la oss si at $n = 2m + 1$.

Vi vet at $\mathbb{F}_n$ har en seksjon med slvsnitt lik $-(2m + 1)$ og vi lar σ betgene klassen til denne. Klassen til en fiber til $\mathbb{F}_n$ betegner vi med f. Da er $f^2 = 0$ og $f \cdot \sigma = 1$

Gruppen $\operatorname{Num} \mathbb{F}_n$ er fri abelsk av rang to med f og σ som basis, og vi skal se snitt formen er isometrisk med snittformen for $\mathbb{F}_1$, som vi studerte i forrige eksempel, men de geometriske strukturene er ganske annerledes. For å sammenligne $\operatorname{Num} \mathbb{F}_n$ med $\operatorname{Num} \mathbb{F}_1$

foretar vi et basisskifte. Vi lar

$$e = mf + \sigma$$
$$h = (m+1)f + \sigma.$$

Da er rett frem etter nesen åps sjekke at $e \cdot h = 0$, så de danner en ortogonal basis. Videre er det like lett å se at $h^2 = 1$ og $e^2 = -1$. Det visere at snittformene på $\operatorname{Num} \mathbb{F}_n$ og $\operatorname{Num} \mathbb{F}_1$ er isometriske (betegnelsene h og e var ikke tilfeldig valgt).

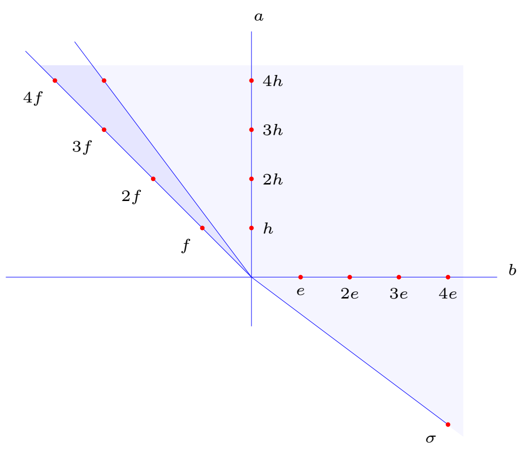
La oss bestemme den effektive og den positive kjeglen. Vi har at $\sigma = (m+1)e - mh$. Og om $c = ah + be$ er en effektive klasse, representert ved en kurve C som ikke har Σ som komponent, må $c \cdot \sigma \geq 0$. Det gir føringen

$$(ah + be) \cdot ((m+1)e - mh) = -(m+1)b - ma \geq 0$$

Samtidig må $f \cdot c \geq 0$, men $f = h - e$ så det gir føringen

$$(ah + be) \cdot (h - e) = a + b \geq 0$$

Sammen gir dette betingelsen $-b \leq a \leq -(1 + 1/m)b$ og $b \leq 0$ som definerer den positive kjeglen. På figuren ser vi at den positive kjeglen til $\mathbb{F}_{2m+1}$ er vesentlig mindre enn for $\mathbb{F}_1$, mens den effektive er utvidet.



Figur 1.5: $\operatorname{Num} X$

❄

OPPGAVE 1.6. Gjør en tilsvarende analyse som i eksempel 1.7 for Hirzebruch-flatene $\mathbb{F}_{2m}$ med en jevn indeks. Sammenlign med kjeglene til $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$. ✸