<u>Sist</u>: · Definisjoner av når $V \subset \mathbb{A}^n$ er algebraisk
(definert av ideal $I(V) \subset \bar{K}[x_1, \dots, x_n]$)

- Def. av når V er definert over K,
  ($I(V)$ er generert av $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$)
- Koordinatring $\bar{K}[V] = \bar{K}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$
  elementer i $\bar{K}[V]$ er funksjoner på V
  $$f \in \bar{K}[V], \qquad f : V \longrightarrow \bar{K}.$$
  Koordinatring $K[V] = K[x_1, \dots, x_n]/(I(V) \cap K[x_1, \dots, x_n])$.
- Funksjonskroppen $\bar{K}(V)$ = brøkkroppen til $\bar{K}[V]$
  $f \in \bar{K}(V)$ f er en delvis definert funksjon
  $$f : V \longrightarrow \bar{K}$$

<u>Projektive varieteter</u>: $\mathbb{P}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_i \in \bar{K}, \text{ ikke alle lik } 0\}/\sim$
$$(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \qquad \lambda \in \bar{K}^*$$

De K-rasjonale punktene til $\mathbb{P}^n$ er
$$\mathbb{P}^n(K) \subset \mathbb{P}^n$$
hvor $P \in \mathbb{P}^n$ ligger i $\mathbb{P}^n(K)$ hvis
$$P = [x_0 : \dots : x_n] \text{ med alle } x_i \in K$$

<u>**Merk**</u>: $K = \mathbb{Q}$, $P = [1+i : 2+2i] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$
$$\overset{\displaystyle ||}{[1 : 2]}$$

Algebraiske mengder: $V \subset \mathbb{P}^n$ er algebraisk hvis $\exists$ homogent ideal $I \subset \bar{K}[x_0, \dots, x_n]$ s.a.

$$V = V_I = \{ P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 ,\ \forall f \in I \}$$

Idealet til en $V \subset \mathbb{P}^n$ er

$$I(V) = \{ f \in \bar{K}[x_0, \dots, x_n] \mid f(P) = 0 \quad \forall P \in V \}$$

Def V er definert over K, skriver V/K hvis

$$I(V) = (f_1, \dots, f_r) , \quad \text{med } f_i \in K[x_0, \dots, x_n] \ \forall i$$

Def Hvis V definert over K, så er de K-rasjonale punktene

$$V(K) = V \cap \mathbb{P}^n(K)$$

Zariski-topologien: En mengde $V \subset \mathbb{P}^n$ er lukket i Zariski-topologien hvis og bare hvis den er algebraisk.

Varietet En alg. mengde $V \subset \mathbb{P}^n$ er en varietet hvis den er irredusibel i Zariski-topologien

$$\Updownarrow$$

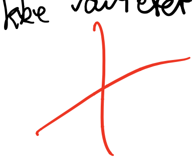
$$V = V_1 \cup V_2 \implies V = V_1 \text{ eller } V_2$$

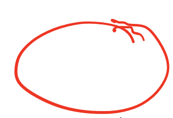
V_i lukket

$$\Updownarrow$$

$I(V)$ er primideal i $\bar{K}[x_i]$

ikke varietet





varietet

Den homogene koordinatringen er

$$\bar{k}[V] = \bar{k}[x_0, \dots, x_n] / I(V)$$

Merk: Elementer her er ikke funksjoner på V

$$f(x_0, \dots, x_n) \neq f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n).$$

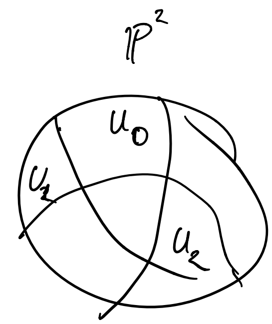
Affin $\longleftrightarrow$ projektiv. Jobber i $\mathbb{P}^n$. Fikser $0 \leq i \leq n$

$\exists$ avbildning $\phi_i : \mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto [x_1 : x_2 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n]$$

La $H_i = V(x_i) \subset \mathbb{P}^n$, la $U_i = \mathbb{P}^n \setminus H_i$

$$H_i = \{[x_0 : \dots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \dots : x_n]\}$$



Da er $\phi_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow U_i$ en bijeksjon.

(1) Hvis $V \subset \mathbb{A}^n$ er en affin varietet, så er

$$\overline{\phi_i(V)} \subset \mathbb{P}^n$$

en projektiv varietet.

(2) Hvis $V \subset \mathbb{P}^n$ er en projektiv varietet, så er

$$V \cap \phi_i(\mathbb{A}^n) \text{ en affin varietet.}$$

Enten er $V \cap \phi_i(\mathbb{A}^n) = \emptyset$, eller så er

$$V = \overline{V \cap \phi_i(\mathbb{A}^n)}. \qquad H_i = \mathbb{P}^n \setminus \phi_i(\mathbb{A}^n)$$

Bevis for ①: $\overline{\phi_i(V)}$ er lukket i Zariski-topologien $\Rightarrow$ $\overline{\phi_i(V)}$ er en algebraisk mengde

Må sjekke at $\overline{\phi_i(V)}$ er irredusibel.

$$\overline{\phi_i(V)} = V_1 \cup V_2 \quad \text{lukket}$$

$$V = \phi_i^{-1}\left(\overline{\phi_i(V)}\right) = \phi_i^{-1}(V_1) \cup \phi_i^{-1}(V_2)$$

$\Rightarrow$ siden V er irredusibel, så er

$$V = \phi_i^{-1}(V_1) \quad \text{eller} \quad V = \phi_i^{-1}(V_2)$$

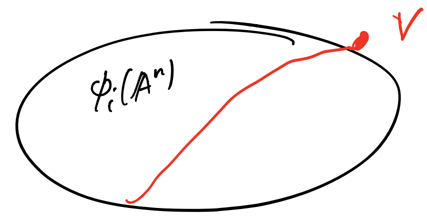
$\phi_i(V) = \phi_i\left(\phi_i^{-1}(V_1)\right) \subseteq V_1$, så

$\overline{\phi_i(V)} \subseteq \overline{V_1} = V_1$, siden V_1 er lukket.

$\square$

Får bijeksjon

$$\left\{ \begin{matrix} \text{proj. varieteter i } \mathbb{P}^n, \text{ ikke} \\ \text{inneholdt i } H_i \end{matrix} \right\} \Updownarrow \left\{ \text{affine varieteter i } \mathbb{A}^n \right\}$$

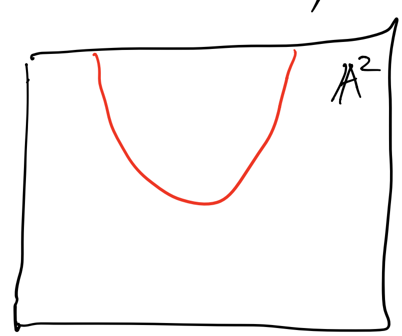


$\phi_i(\mathbb{A}^n)$ er tett, åpen i $\mathbb{P}^n$ (= nesten hele $\mathbb{P}^n$)

$\mathbb{P}^2$ $[X:Y:Z]$ $\quad V = V_I \quad I = (ZY - X^2)$

$\phi_2(\mathbb{A}^2) = \{[X:Y:1]\}$

$V \cap \phi_2(\mathbb{A}^2) = \{[x:y:1] \mid y = x^2\}$



Idealer: Dehomogenisering: Hvis $f \in \bar{K}[X_0, \dots, X_n]$ homogent polynom, så er $f_* \in \bar{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$ gitt ved

$$f_*(X_0, \dots, X_n) = f(X_0, \dots X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

Homogenisering: Hvis $f \in \bar{K}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$, så er homogeniseringen $f^* \in \bar{K}[X_0, \dots, X_n]$

$$f^*(X_0, \dots, X_n) = X_i^d f\left(\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right)$$

hvor d = graden til f.

Eks: $f = y - x^2$ $\quad f^*(x, y, z) = z^2 f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$

$$= z^2\left(\frac{y}{z} - \frac{x^2}{z^2}\right) = zy - x^2.$$

Eks: $f = y^2 - x^3 + 1$

$$f^* = zy^2 - x^3 + z^3$$

Prop: La $V \subset \mathbb{A}^n$ være en varietet. La $\overline{V} = \overline{\phi_i(V)}$.

Vi har

$$I(\overline{V}) = (f^*)_{f \in I(V)}$$

Tilsvarende: Hvis $V' \subset \mathbb{P}^n$ er proj. varietet, så er

$$I(V' \cap \phi_i(\mathbb{A}^n)) = (f_*)_{f \in I(V')}$$

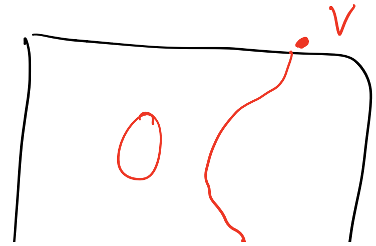
V er definert over $K \iff \overline{V}$ er definert over K

V' er definert over $K \iff V \cap \phi_i(\mathbb{A}^n)$ er definert over K.

Notasjon/slang: Kan nå definere projektive varieteter vha. inhomogene ligninger. F.eks. „La V være den proj. varieteten definert av $y^2 - x^3 + x$" betyr „La $V = V_I$, $I = (zy^2 - x^3 + z^2x)$".

La $V \subset \mathbb{P}^n$ være proj. varietet.

- $\dim V = \dim(V \cap \phi_i(\mathbb{A}^n))$



- V er ikke-singulær i $P \in V$ hvis $V \cap \phi_i(\mathbb{A}^n)$ er ikke-singulær i P (velger i s.a. $P \in \phi_i(\mathbb{A}^n)$)
- Funksjonskroppen $\bar{K}(V)$ er

$$\bar{K}(V) \subset \text{brokkroppen til } \bar{K}[V]$$

$$\left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \bar{K}[V],\ \deg f = \deg g \right\}.$$

Hvis $g(x_0, \dots, x_n) \neq 0$, så er $\dfrac{f(x_0, \dots, x_n)}{g(x_0, \dots, x_n)} \in \bar{K}$ veldefinert, fordi $\dfrac{f(\lambda x_i)}{g(\lambda x_i)} = \dfrac{f(x_i)}{g(x_i)}$.

Avbildninger: La $V_1 \subset \mathbb{P}^m$ og $V_2 \subset \mathbb{P}^n$ være projektive varieteter. En rasjonal avbildning $\phi : V_1 \to V_2$ er gitt ved

$$\phi = [f_0 : \dots : f_n] \qquad f_i \in \bar{K}(V_1)$$

s.a. hvis alle f_i er definert i $P \in V_1$, så er

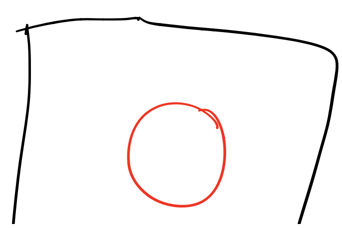
$$\phi(P) = [f_0(P) : \dots : f_n(P)] \in V_2.$$

Eks: $V_1 = \mathbb{P}^1$ $\quad$ $V_2 = V_I \subset \mathbb{P}^2$ $\quad$ $I = (Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2)$

$[X_0 : X_1]$ $\qquad$ $[Y_0 : Y_1 : Y_2]$

$\bar{K}(V_1) = \bar{K}\left(\frac{X_1}{X_0}\right)$ $\frac{X_0}{X_1}$? $\qquad$ $\bar{K}[V_1] = \bar{K}[X_0, X_1]$

$\{\text{rasj. funksjoner i } \frac{X_1}{X_0}\}$ $\qquad$ Brokkroppen er $\bar{K}(X_0, X_1)$



Har $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ gitt ved

$$\phi = \left[\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 1 : 2\frac{x_1}{x_0} : \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 1\right]$$

siden
$$\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 1\right)^2 + \left(2\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 1\right)^2 = 0$$

<u>Def</u>: Hvis $\phi = [f_0 : \cdots : f_n] : V_1 \longrightarrow V_2$ er en rasj. avbildning og V_1, V_2 er definert over K, da er <u>ϕ def. over K</u> hvis det finnes en $g \in \overline{K}(V_1)^*$ s.a.

$$g f_0, g f_1, \ldots, g f_n \in K(V_1)$$

$$\phi = [f_0 : \cdots : f_n] = [g f_0 : \cdots : g f_n]$$

Hvis ϕ er def. over K og $P \in V_1(K)$ s.a. ϕ er definert i P, da er $\phi(P) \in V_2(K)$.