Sist: Gitt $V_1 \subset \mathbb{P}^m$ og $V_2 \subset \mathbb{P}^n$, er rasjonal avbildning $\phi\colon V_1 \to V_2$ gitt ved

$$\phi = [f_0 : \ldots : f_n], \qquad f_i \in \overline{K}(V_1),$$

slik at hvis (1) $f_i(P)$ er definert for alle i og (2) ikke alle $f_i(P) = 0$, så er

$$[f_0(P) : \ldots : f_n(P)] \in V_2.$$

Merknad. Kan også definere ϕ ved $[f_0 : \ldots : f_n]$ med $f_i \in \overline{K}[V_1]$ (den homogene koordinatringen), hvor f_i er homogene av samme grad.

Eksempel. Kan skrive $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ som

$$\phi([X : Y]) = [X/Y : 1 : Y^2/X^2] \quad \text{eller} \quad \phi([X : Y]) = [X^3 : YX^2 : XY^2]$$

Definisjon. Avbildning ϕ er *definert* eller *regulær* i $P \in V_1$ hvis $\exists g \in \overline{K}(V_1)^*$ slik at

$$[gf_1(P) : \ldots : gf_n(P)]$$

er et veldefinert punkt (alle $gf_i(P)$ definert, ikke alle lik 0).

ϕ er *morfi* hvis den er regulær i alle punkter.

Proposisjon. *Hvis V_1, V_2 er definert over K og $\phi\colon V_1 \to V_2$ er en morfi definert over K, så er $\phi(V_1(K)) \subseteq V_2(K)$.*

Bevis. La $P \in V_1(K)$.

ϕ en morfi og definert over $K \rightsquigarrow$ kan skrive $\phi = [f_1 : \ldots, f_n]$ med $f_i \in K(V_1)$ og alle f_i definert i P. Dermed er $\phi(P) = [f_1(P) : \ldots : f_n(P)] \in \mathbb{P}^n(K) \cap V_2 = V_2(K)$. $\square$

Definisjon. La V_1, V_2 være projektive varieteter. Vi sier V_1 og V_2 er isomorfe (skriver $V_1 \cong V_2$) hvis $\exists$ morfier $\phi\colon V_1 \to V_2$, $\psi\colon V_2 \to V_1$, slik at $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V_2}$ og $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{V_1}$.

Hvis V_1, V_2 er definert over K, sier vi at V_1 og V_2 er isomorfe over K hvis vi kan finne ϕ, ψ som over, definert over K.

Proposisjon. *Hvis V_1, V_2 er isomorfe over K, så er $V_1(K)$ i bijeksjon med $V_2(K)$.*

Bevis. Vi har avbildninger $\phi : V_1(K) \to V_2(K)$ og $\psi : V_2(K) \to V_1(K)$ slik at $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V_1(K)}$ og $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{V_2(K)}$. $\square$

Eksempel. La $K = \mathbb{R}$. La $V_a \subset \mathbb{P}^2$ være gitt ved

$$X^2 + Y^2 + aZ^2.$$

Påstand 1: $V_a \cong V_b$ når $a, b \neq 0$.

Bevis: Definer morfiene $\phi\colon V_a \to V_b$ og $\psi\colon V_b \to V_a$ ved

$$\phi([x : y : z]) = [x : y : (b/a)^{1/2} z], \quad \psi([x : y : z]) = [x : y : (a/b)^{1/2} z]$$

Påstand 2: $V_a/\mathbb{R} \cong V_b/\mathbb{R} \Leftrightarrow a$ og b har samme fortegn.

Bevis $\Leftarrow$: $(a/b)^{\pm 1/2} \in \mathbb{R}$ betyr at ϕ, ψ er definert over $\mathbb{R}$.

Bevis $\Rightarrow$: $V_a(\mathbb{R}) = \varnothing$ hvis $a < 0$, $V_a(\mathbb{R}) =$ sirkel hvis $a > 0$.

Kurver. Kurve: Projektiv varietet av dimensjon 1.

Fra nå er C ikkesingulær kurve.

Husk: For $P \in C$, er $\overline{K}[C]_P$ *den lokale ringen* til C, definert som

$$\overline{K}[C]_P = \{f \in \overline{K}(C) \mid f \text{ regulær i } P\}.$$

Ringen *er* lokal ring, dvs. $\exists!$ maksimalt ideal $\mathfrak{m}_P \subset \overline{K}[C]_P$, og vi har

$$\mathfrak{m}_P = \{f \in \overline{K}[C]_P \mid f(P) = 0\}.$$

Proposisjon. *Hvis $P \in C$ er ikkesingulært punkt, er $\overline{K}[C]_P$ en diskret valuasjonsring.*

Dvs. at det finnes en funksjon

$$\operatorname{ord}_P \colon \overline{K}[C]_P \to \{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\}$$
$$\text{Definisjon: } \operatorname{ord}_P(f) = n \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}_P^n \setminus \mathfrak{m}_P^{n+1}$$
$$\text{Egenskap: } \operatorname{ord}_P(fg) = \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_P(g)$$

uformelt "forsvinningsordenen til funksjonen i punktet P".

Definisjon. Hvis $t \in \overline{K}[C]_P$ har $\operatorname{ord}_P(t) = 1$, kalles t en *lokal parameter* (="uniformiser") for C i P.

Eksempel. La $C = \mathbb{P}^1$, $P = 0$. Da er

$$\overline{K}[\mathbb{P}^1]_0 = \{\text{rasjonale funksjoner i } x \text{ definert i } 0\}$$

x er en lokal parameter for $\mathbb{P}^1$ i 0.

Kan beregne ord_0 definert ved

$$f = x^{\operatorname{ord}_0(f)} g,$$

hvor $g(0)$ er definert og $g(0) \neq 0$. F.eks: $\operatorname{ord}_0(\frac{x^2+x^3}{1+3x}) = 2$.

Kan utvide ord_P til $\overline{K}(C) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ved

$$\operatorname{ord}_P\left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{ord}_P(f) - \operatorname{ord}_P(g).$$

For $f \in \overline{K}(C)$:

- $\operatorname{ord}_P(f) \geq 0 \Leftrightarrow f$ definert i P
- $\operatorname{ord}_P(f) > 0 \Leftrightarrow f(P) = 0$
- $\operatorname{ord}_P(f) < 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} f$ har en pol i P.

Proposisjon. *Hvis t er en lokal parameter i P, så er $\operatorname{ord}_P(f)$ tallet n slik at*

$$f = t^n g,$$

hvor $g(P)$ er definert og $\neq 0$.

Bevis. Siden $\operatorname{ord}_P(g) = 0$, er
$$\operatorname{ord}_P(f) = \operatorname{ord}_P(t^n)\operatorname{ord}_P(g) = n.$$
$\square$

Eksempel. La $C = \mathbb{P}^1$. Bruker koordinater $[X : Y] = [X/Y : 1] = x$, altså $x = X/Y$. Har at $x - a$ er en lokal parameter i $a \in \mathbb{P}^1$, og x^{-1} en lokal parameter i ∞. Funksjonen $f = \prod (x - a_i)^{n_i}$ med distinkte $a_i \in \overline{K}$ har
$$\operatorname{ord}_{a_i}(f) = n_i, \quad \operatorname{ord}_\infty(f) = -\sum n_i, \quad \operatorname{ord}_a(f) = 0$$
i alle andre punkter a, siden
$$((x - a_i)^{-n_i} f)(a_i) \neq 0 \quad (x^{-\sum n_i} f)(\infty) \neq 0 \quad f(a) \neq 0 \quad \text{hvis } a \neq 0.$$

Eksempel. La oss bruke $[X : Y : Z] = [X/Z : Y/Z : 1] = (x, y)$ som koordinater. La $C \in \mathbb{P}^2$ være definert ved
$$y^2 - x^3 - x = 0 \qquad \text{altså } ZY^2 - X^3 - Z^2X = 0$$

Påstand: y er lokal parameter i $(0,0) \in C$. Må sjekke at $(y) = \mathfrak{m}_{(0,0)} \subseteq \overline{K}[C]_{(0,0)}$, holder å sjekke $\overline{K}[C]_{(0,0)}/(y) = \overline{K}$.

Vi regner:
$$\overline{K}[C]_{(0,0)} = (\overline{K}[x,y]/(y^2 - x^3 - x))_{(x,y)} = \overline{K}[x,y]_{(x,y)}/(y^2 - x^3 - x),$$
så
$$\begin{aligned}\overline{K}[C]_{(0,0)}/(y) &= \overline{K}[x,y]_{(x,y)}/(y, y^2 - x^3 - x)\\ &= \overline{K}[x,y]_{(x,y)}/(y, x^3 - x) = \overline{K}[x,y]_{(x,y)}/(y, x) = \overline{K},\end{aligned}$$
siden $x^3 - x = (x^2 - 1)x$ og $x^2 - 1$ er invertibelt i $\overline{K}[x,y]_{(x,y)}$.

Hva med x? Siden
$$xy^{-2} = x(x^3 + x)^{-1} = (1 + x^2)^{-1}$$
har vi $\operatorname{ord}_{(0,0)}(x) = 2$.

Proposisjon. *Hvis $0 \neq f \in \overline{K}(C)$, så er*

- $\operatorname{ord}_P(f) = 0$ *bortsett fra i endelig mange punkter*
- $\sum_{P \in C} \operatorname{ord}_P(f) = 0$
- *Hvis f ikke har noen poler (f er regulær overalt), så er f konstant.*