Sist: Gitt $V_1 \subset \mathbb{P}^m$ $V_2 \subset \mathbb{P}^n$, så er rasjonal avbildning

$$\phi = [f_0 : \dots : f_n], \quad f_i \in \bar{K}(V_1)$$

s.a. hvis $f_i(P)$ er def. og ikke alle $= 0$ for $P \in V_1$, så er

$$\phi(P) = [f_0(P) : \dots : f_n(P)] \in V_2.$$

Merk Kan også definere ϕ ved $[f_0 : \dots : f_n]$ med $f_i \in \bar{K}[V_1]$ homogene koord. ringen av samme grad.

Eks Kan skrive $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$

$$\phi([X:Y]) = [\tfrac{X}{Y} : 1 : Y^2/X^2] \text{ eller } \phi([X:Y]) = [X^3 : X^2Y : Y^3]$$

Def. En rasj. avbildning ϕ er definert i P (regulær i P) hvis $\exists\, g \in \bar{K}(V_1)$ s.a.

$$[(gf_0)(P) : (gf_1)(P) : \dots : (gf_n)(P)] \qquad \begin{matrix} f_i \in \bar{K}(V_1) \\ gf_i \in \bar{K}(V_1) \end{matrix}$$

er et veldef. pkt i $\mathbb{P}^n$, (alle gf_i er def. i P ikke alle $= 0$)

$f_0 = \frac{1}{x}$ $\quad g = x$.

Def Hvis ϕ er def. i alle punkter i V_1, er den en morfi.

Prop Hvis V_1, V_2 er def. over K og $\phi : V_1 \to V_2$ er morfi def. over K, så er $\phi(P) \in V_2(K)$ for alle $P \in V_1(K)$.

Bevis: La $P \in V_1(K)$. ϕ er en morfi & ϕ def. over K

$\Rightarrow$ kan finne $\phi = [f_0 : \dots : f_n]$ s.a. $f_i \in K(V_1)$ og alle f_i def. i P, ikke alle $f_i(P)=0$. Da er

$$\phi(P) = [f_0(P) : \dots : f_n(P)] \in \mathbb{P}^n(K), \text{ siden } f_i(P) \in K.$$

Def La V_1, V_2 være projektive varieteter, vi sier V_1 & V_2 er isomorfe $(V_1 \cong V_2)$ hvis det fins morfier $\phi : V_1 \to V_2$ $\psi : V_2 \to V_1$, $\varphi \circ \psi = id_{V_2}$ $\psi \circ \varphi = id_{V_1}$.

Hvis V_1, V_2 er def. over K, så er de isomorfe over K $(V_1/K \cong V_2/K)$ hvis $\exists\, \varphi, \psi$ som over med φ, ψ def. over K.

Prop. Hvis $V_1/K \cong V_2/K$, så er $V_1(K)$ i bijeksjon med $V_2(K)$.

Bevis: Har $\varphi : V_1/K \to V_2/K$, $\psi : V_2/K \to V_1/K$ som gir

$$V_1(K) \longrightarrow V_2(K) \qquad V_2(K) \longrightarrow V_1(K)$$
$$P \longmapsto \varphi(P) \qquad P \longmapsto \psi(P)$$

som er inverse til hverandre.

Eksempel: La $K = \mathbb{R}$. La $V_a \subset \mathbb{P}^2$ $0 \neq a \in \mathbb{R}$ være gitt ved

$$X^2 + Y^2 - aZ^2$$

Påstand: $V_a \cong V_b$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bevis: Definer $\phi : V_a \to V_b$ $\psi : V_b \to V_a$ ved

$$\phi([x : y : z]) = [x : y : (\tfrac{b}{a})^{\frac{1}{2}} z] \qquad \psi([x : y : z]) = [x : y : (\tfrac{a}{b})^{\frac{1}{2}} z].$$

Påstand: $V_a/\mathbb{R} \cong V_b/\mathbb{R} \iff a, b$ har samme fortegn.

$\Leftarrow$: $(\frac{b}{a})^{1/2}, (\frac{a}{b})^{1/2} \in \mathbb{R} \implies \phi, \psi$ def. over $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$: $V_a(\mathbb{R}) = \emptyset$ hvis $a < 0$ $V_a(\mathbb{R}) =$ sirkel hvis $a > 0$.

Kurver: Kurve = Projektiv varietet av dim. 1.

Fra nå er C en ikkesingulær kurve.

Husk: For $P \in C$, er $\bar{K}[C]_P$ er den lokale ringen til C i P,

$$\bar{K}[C]_P = \{ f \in \bar{K}(C) \mid f \text{ er def. i } P \}.$$

Ringen er lokal ring, dvs $\exists!$ maks ideal $m_P \subset \bar{K}[C]_P$,

$$m_P = \{ f \in \bar{K}[C]_P \mid f(P) = 0 \}.$$

Prop (Siden $P \in C$ er ikkesingulært pkt.), er $\bar{K}[C]_P$ en DVR (diskret valuasjonsring).

Dvs: $\exists\, t \in \bar{K}[C]$ s.a. $m_P = (t)$, og idealene

$$m_P \supset m_P^2 \supset m_P^3 \supset \cdots \qquad + (0)$$
$$(t) \supset (t^2) \supset (t^3) \cdots \qquad + (0).$$

er alle idealene i $\bar{K}[C]_P$.

Kan definere funksjon $\mathrm{ord}_P : \bar{K}[C]_P \to \{0,1,2,\ldots\} \cup \infty$ ved

$$\mathrm{ord}_P(f) = n \iff f \in m^n \setminus m^{n+1}$$
$$\mathrm{ord}_P(0) = \infty$$

Har $\quad \mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$

= „forsvinningsordenen til f i P".

Def Hvis $t \in \bar{K}[C]_P$ har $\mathrm{ord}_P(t) = 1$ $\quad (\iff m_P = (t))$

så er t en <u>lokal parameter</u> (= „uniformizer").

<u>Eksempel</u> La $C = \mathbb{P}^1$, $[X:Y] = [x:1]$, $x = \frac{X}{Y}$. $0 = [0:1]$ $\quad x = \frac{X}{Y}$

$$\overline{K}[\mathbb{P}^1]_0 = \{\text{rasjonale funksjoner i } x, \text{ definert i } 0\}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

Her er x en lokal parameter i 0. $\overline{K}[x]_{(x)}$ $\quad m = (x)$

Kan beregne ord_0 ved

$$f = x^{\mathrm{ord}_0(f)} g$$

hvor $g(0)$ er definert og $g(0) \neq 0$.

$$\mathrm{ord}_0\left(\frac{x^2+2x^3}{1+x}\right) = \mathrm{ord}_0\left(x^2\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)\right) = 2.$$

Kan utvide ord_P $\overline{\text{til } \mathrm{ord}_P : \overline{K}(C)}$ $\to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ved

$$\mathrm{ord}_P\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{ord}_P(f) - \mathrm{ord}_P(g).$$

<u>For $f \in \overline{K}(C)$:</u>

- $\mathrm{ord}_P(f) \geq 0 \iff f$ er definert i P
- $\mathrm{ord}_P(f) > 0 \iff f(P) = 0$
- $\mathrm{ord}_P(f) < 0 \overset{\text{def.}}{\iff} f$ har <u>pol</u> i P.

<u>Prop</u>. Hvis t er lokal parameter i P, og $f \in \overline{K}(C)$, så er $\mathrm{ord}_P(f)$ tallet n s. a.

$$f = t^n g,$$

med g definert i P og $g(P) \neq 0$.

<u>Bevis</u> $\mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(t^n g) = n\,\mathrm{ord}_P(t) + \mathrm{ord}_P(g)$

$\mathrm{ord}_p(t) = 1$
$\mathrm{ord}_p(g) = 0$ $\qquad = n.$

<u>Eksempel</u>: La $C = \mathbb{P}^1$, $\overline{[X:Y] = [x:1]}$ $\quad x = \frac{X}{Y}$ $\quad \overline{K}(C) = \overline{K}(x)$

La $f = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{n_i} \in \overline{K}(C)$ $\qquad n_i \in \mathbb{Z}$
a_i distinkte i $\overline{K}$.

Da er $\mathrm{ord}_{a_i}(f) = n_i \ \forall i$ $\quad \mathrm{ord}_\infty(f) = -\sum n_i$ $\quad \mathrm{ord}_a(f) = 0$ for andre $a \in \mathbb{P}^1$.

<u>Bevis</u>: $x - a_i$ er lokal parameter i a_i

$$f = (x - a_i)^{n_i} g \quad \text{ved } g(a_i) \neq 0.$$

x^{-1} er lokal parameter i ∞

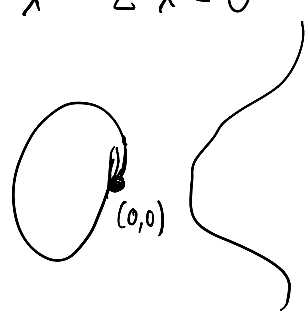
$$f = x^{\sum n_i} g \quad \text{ved } g(\infty) \neq 0$$

$f(a) \neq 0$ for andre a.

<u>Eksempel</u>: La $\mathbb{P}^2$, $\overline{\text{koordinater } [X:Y:Z]} = [x:y:1] = (x,y)$ $\quad x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$.

La $C \subset \mathbb{P}^2$ være definert ved

$$y^2 - x^3 - x = 0 \quad \text{dvs. } ZY^2 - X^3 - Z^2X = 0$$



<u>Påstand</u>: $y \in \overline{K}[C]_{(0,0)}$ er en lokal parameter i $(0,0)$.

Må sjekke at $(y) = \mathfrak{m}_{(0,0)} \subset \overline{K}[C]_{(0,0)}$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{K}[C]_{(0,0)} / (y) \cong \overline{K}.$$

<u>Regner</u>: $\overline{K}[C]_{(0,0)} = \left(\overline{K}[x,y] / (y^2 - x^3 - x) \right)_{(x,y)} = \overline{K}[x,y]_{(x,y)} / (y^2 - x^3 - x)$

så

$$\bar{K}[C]_{(0,0)}/(y) = \bar{K}[x,y]_{(x,y)}/(y,\ y^2 - x^3 - x)$$

$$= \bar{K}[x,y]_{(x,y)}/(y,\ x^3 - x)$$

$x^3 - x = (x^2-1)x$
x^2-1 er inverterbar
i $\bar{K}[x,y]_{(x,y)}$

$$= \bar{K}[x,y]_{(x,y)}/(y, x) = \bar{K}.$$

Hva med x? Har $\operatorname{ord}_{(0,0)}(x) = 2$ siden $y^2 - x^3 - x = 0$

$$x y^{-2} = \frac{x}{x^3 + x} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{ord}_{(0,0)}\left(\tfrac{1}{1+x^2}\right) = 0.$$

$$\operatorname{ord}_{(0,0)}(x) = \operatorname{ord}_{(0,0)}\left(y^2 \frac{1}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{ord}_{(0,0)}(y) = 2.$$

<u>Prop</u> Hvis $0 \neq f \in \overline{\bar{K}(C)}$, så

- $\operatorname{ord}_P(f) = 0$ bortsett fra i endelig mange P
- $\sum_{P \in C} \operatorname{ord}_P(f) = 0$
- Hvis f ikke har poler ($\operatorname{ord}_P(f) \geq 0$ overalt), så er f konstant $f \in \bar{K} \subset \bar{K}(C)$.

Hvis $g, f \in \bar{K}(C)$, og $\operatorname{ord}_P(g) = \operatorname{ord}_P(f)$ $\forall P \in C$, så er $g = \lambda f$ med $\lambda \in \bar{K}^*$, fordi $\operatorname{ord}_P\left(\frac{f}{g}\right) = 0$ $\forall P$

$\Rightarrow \frac{f}{g} = \lambda$ konstant.