Sist og fortsatt: C en ikkesingulær kurve (noen resultater holder også for singulære kurver).

For $P \in C$, studerte $\overline{K}[C]_P$, som er en DVR.

Dette gir "ordensfunksjonen" $\operatorname{ord}_P : \overline{K}(C) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Proposisjon. *La $V \subset \mathbb{P}^N$ være projektiv varietet, og la $\phi\colon C \to V$ være rasjonal avbildning. Da er ϕ regulær overalt (=ϕ er morfi).*

Bevis. For $P \in C$, må sjekke at ϕ er regulær i P. Skriv

$$\phi = [f_0 : \ldots : f_N] \text{ med } f_i \in \overline{K}(C),$$

la $n_i = \operatorname{ord}_P(f_i)$ og $n = \min n_i$.

La $t \in \overline{K}(C)$ være lokal parameter for C i P, og skriv ϕ som

$$\phi = [t^{-n} f_0 : \ldots : t^{-n} f_N].$$

$\forall i$ er $\operatorname{ord}_P(t^{-n} f_i) = n_i - n \geq 0 \Rightarrow t^{-n} f_i$ definert i P.

$\exists i$ slik at $\operatorname{ord}_P(t^{-n} f_i) = 0 \Rightarrow (t^{-n} f_i)(P) \neq 0$.

Så ϕ er regulær i P. □

Merknad. Dette gjelder bare når C er *ikkesingulær kurve* (se oppg. 1.6, 1.7 i Silverman).

Eksempel. La C være ikkesingulær, og la $f \in \overline{K}(C)$. Definer rasjonal avbildning

$$\phi_f = [f : 1]\colon C \to \mathbb{P}^1.$$

Ved Prop. over er ϕ_f morfi, beskrevet på punkter ved:

- Hvis f er definert i P,
$$\phi_f(P) = [f(P) : 1].$$
- Hvis f har en pol i P, bruker vi
$$\phi_f = [1 : f^{-1}].$$
Siden $\operatorname{ord}_P(f^{-1}) = -\operatorname{ord}_P(f) > 0$, er $f^{-1}(P) = 0$, så
$$\phi_f(P) = [1 : 0].$$

En morfi $\phi = [f_0 : f_1]\colon C \to \mathbb{P}^1$ er lik ϕ_{f_0/f_1}, så får bijeksjon

$$\overline{K}(C) \cup \{\infty\} \leftrightarrow \{\text{morfier } \phi\colon C \to \mathbb{P}^1\}.$$

Proposisjon. *Hvis $\phi\colon C_1 \to C_2$ er en morfi av kurver, så er ϕ enten surjektiv, eller så er $\phi(C_1) = P$ for en $P \in C_2$.*

Bevis hvis $C_2 = \mathbb{P}^1$: Anta at ϕ ikke er surjektiv, så $\exists Q \in \mathbb{P}^1$ slik at $\phi(P) \neq Q$ for alle $P \in C_1$. Skriv $\phi = \phi_f$ for $f \in \overline{K}(C_1)$.

- Case 1: $Q = [1 : 0] = \infty$. Da er f regulær i alle P, altså konstant.

- Case 2: $Q = [a : 1]$. Da er $f(P) \neq a$ for alle P. Følger at $(f - a)^{-1}$ er regulær i alle P, altså konstant.

Kurver er kropper.

Definisjon. Transcendensgraden $\operatorname{tr.deg.}(L/K)$ til en kroppsutvidelse $K \subset L$ er største n slik at det finnes inklusjon $K(x_1, \dots, x_n) \subset L$.

Hvis L er en endelig generert kropp over K og $\operatorname{tr.deg.}(L/K) = n$, så er L en endelig utvidelse av $K(x_1, \dots, x_n)$.

Definisjon. Gitt L/K og L'/K, sier vi at $\iota\colon L \to L'$ er *en homomorfi over* K hvis $\iota(x) = x$ for alle $x \in K$.

Proposisjon. *Hvis V er en varietet, så er $\overline{K}(V)$ endelig generert over $\overline{K}$ og $\operatorname{tr.deg.}(\overline{K}(V)/\overline{K}) = n$.*

La $\phi\colon C_1 \to C_2$ være en ikkekonstant morfi. Dette induserer

$$\phi^*\colon \overline{K}(C_2) \to \overline{K}(C_1),$$

ved

$$\phi^*(f)(P) = (f \circ \phi)(P) \qquad \forall P \in \overline{K}(C_2).$$

Proposisjon. *Kroppsutvidelsen $\overline{K}(C_1)/\phi^*(\overline{K}(C_2))$ er endelig.*

Bevis. Velg et element $x \in \overline{K}(C_2) \setminus \overline{K}$. Da har vi inklusjoner

$$\phi^*(\overline{K}(x)) \subset \phi^*(\overline{K}(C_2)) \subset \overline{K}(C_1).$$

Siden $\operatorname{tr.deg.} \overline{K}(C_1)/K = 1$, er $\overline{K}(C_1)/\phi^*(\overline{K}(x))$ endelig, så $\overline{K}(C_1)/\phi^*(\overline{K}(C_2))$ er endelig. $\square$

Eksempel. For $\mathbb{P}^1$, med koordinater $[X : Y]$, har vi $\overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x)$ med $x = \frac{X}{Y}$.

La $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ være gitt ved

$$\phi(X : Y) = [X^n : Y^n].$$

Da er $\phi^*(x) = x^n$, så $\phi^*\overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x^n) \subset \overline{K}(x)$.

Proposisjon. *La $\iota\colon \overline{K}(C_2) \hookrightarrow \overline{K}(C_1)$ være en homomorfi over $\overline{K}$. Da finnes en unik $\phi\colon C_1 \to C_2$ slik at $\iota = \phi^*$.*

Bevis. La $C_2 \subset \mathbb{P}^N$, og for $i = 1, \dots, n$, la $g_i = \frac{X_i}{X_0} \in \overline{K}(C_2)$. Siden $\overline{K}[C_2]$ er generert over $\overline{K}$ av X_i, så er kroppen $\overline{K}(C_2)$ generert over $\overline{K}$ av elementene $X_i/X_j \in \overline{K}(C_2) \rightsquigarrow \overline{K}(C_2)$ generert av g_i.

Så hvis $\phi = [f_0\colon \dots : f_N]\colon C_1 \to C_2$ er morfi, så er $\phi^* = \iota$ hvis og bare hvis $\phi^*(g_i) = \iota(g_i)$.

Men

$$\phi^*(g_i) = g_i \circ \phi = \frac{X_i}{X_0} \circ \phi = \frac{f_i}{f_0},$$

så vi må ha

$$\phi = [f_0 : \dots : f_N] = [1 : f_1 f_0^{-1} : \dots : f_N f_0^{-1}] = [1 \colon \iota(g_1) : \dots : \iota(g_N)]$$

Kan sjekke at dette gir en morfi $\phi \colon C_1 \to C_2$. □

Proposisjon. *Hvis $L/\overline{K}$ er en kroppsutvidelse med* tr. deg.$(L/\overline{K})$*, så finnes en unik (opp til isomorfi) ikkesingulær kurve C slik at $L \cong \overline{K}(C)$ som kroppsutvidelser av $\overline{K}$.*

Oppsummert: (Ikkesingulære kurver, med ikkekonstante morfier mellom dem), er nøyaktig det samme som (Kroppsutvidelser av $\overline{K}$ med tr. deg. $= 1$, og homomorfier av kropper over $\overline{K}$).

Kan nå definere egenskaper til en ikkekonstant morfi ϕ ved å se på egenskapene til kroppinklusjonen ϕ^*, f.eks. separabel/inseparabel.

Definisjon. Hvis $\phi \colon C_1 \to C_2$ er en morfi av kurver, så er graden til ϕ definert ved

$$\deg \phi = 0 \text{ hvis } \phi \text{ er konstant.}$$

og

$$\deg \phi = [\overline{K}(C_1) : \phi^* \overline{K}(C_2)]$$

ellers.

Eksempel. For $\phi = [X^n : Y^n] \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, er

$$\deg \phi = [\overline{K}(x) \colon \overline{K}(x^n)] = n.$$

Definisjon. La $\phi \colon C_1 \to C_2$ være ikkekonstant morfi av ikkesingulære kurver, la $P \in C_1$ med $f(P) = Q$, og la t_Q være lokale parametere i P og Q.

Da er *ramifikasjonsindeks* til ϕ i P gitt ved

$$e_\phi(P) = \operatorname{ord}_P(\phi^* t_Q).$$

Vi sier at ϕ er ramifisert i P hvis $e_\phi(P) > 1$.

Proposisjon. *For alle $Q \in C_2$, har vi at*

$$\sum_{P \in \phi^{-1}(Q)} e_\phi(P) = \deg \phi.$$

EN TEGNING HER

Eksempel. For $\phi = [X^n : Y^n] \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, så er

$$e_\phi(P) = 1 \text{ når } P \notin \{[1:0],[0:1]\},$$

og

$$e_\phi([1:0]) = e_\phi([0:1]) = n.$$

Beregning i $[0:1]$: Her er x lokal parameter, og $\phi^*(x) = x^n$, med $\operatorname{ord}_{[0:1]}(x^n) = n$.