Sist og fortsatt: $C$ en ikke sing. kurve (noe gjelder for sing. kurver)

For $P \in C$, så på $\bar{K}[C]_P$, en DVR.

Har „ordensfunksjonen" $\mathrm{ord}_P : \bar{K}(C) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Prop. La $V \subset \mathbb{P}^N$ være proj. varietet, og $\phi : C \longrightarrow V$ en rasjonal avbildning. Da er $\phi$ regulær i alle $p \in C$ ($\phi$ er en morfi).

Bevis: La $\phi = [f_0 : \cdots : f_N]$, $f_i \in \bar{K}(C)$

Må sjekke $\phi$ regulær i $P \in C$

La $n_i = \mathrm{ord}_P(f_i)$, $n = \min n_i$. La $t$ være lokal parameter i $P$.

Kan skrive

$$\phi = [t^{-n} f_0 : \cdots : t^{-n} f_N]$$

$\forall i$ er $\mathrm{ord}_P(t^{-n} f_i) = n_i - n \geq 0 \Rightarrow t^{-n} f_i$ er def. i $P$

$\exists i$ s.a. $\mathrm{ord}_P(t^{-n} f_i) = n_i - n = 0 \Rightarrow (t^{-n} f_i)(P) \neq 0$.

Merk: Feiler hvis $C$ ikke er kurve. & hvis $C$ er singulær. oppg. (1.6, 1.7).

Eksempel: La $f \in \bar{K}(C)$. Definer rasj. avbildning $\phi_f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ved

$$\phi_f = [f : 1]$$

Ved prop. over er $\phi$ en morfi $C \to \mathbb{P}^1$, gitt på punkter ved

- Hvis $f$ definert i $P$, $\phi_f(P) = [f(P) : 1]$
- Hvis $f$ har pol i $P$, kan skrive

$$\phi_f = [1 : f^{-1}]$$

Har $\mathrm{ord}_P(f^{-1}) = -\mathrm{ord}_P(f) > 0$ siden $f$ har pol i $P$.

$\Rightarrow f^{-1}$ er def. i $P$ og $f^{-1}(P) = 0$

$$\phi_f(P) = [1:0] \quad (= \infty \in \mathbb{P}^1)$$

En morfi $\phi = [f_0 : f_1] : C \to \mathbb{P}^1$ er lik $\phi_{f_0/f_1}$. (hvis $f_1 \neq 0$)

Har bijeksjon

$$\begin{aligned} \overline{K}(C) \cup \{\infty\} &\longleftrightarrow \{\text{morfier } f : C \to \mathbb{P}^1\} \\ f &\longmapsto \phi_f \\ \infty &\longmapsto \phi : C \to \mathbb{P}^1 \\ & \qquad\quad \overset{\shortparallel}{[1:0]} \end{aligned}$$

---

<u>Proposisjon</u>: Hvis $\phi : C_1 \to C_2$ er en morfi av kurver, så er $\phi$ enten surjektiv, eller konstant, dvs. $\exists Q \in C_2$ s.a. $\phi(C_1) = Q$.

<u>Bevis hvis $C_2 = \mathbb{P}^1$</u>: Anta at $\phi$ ikke er surjektiv, $\Rightarrow \exists Q \in \mathbb{P}^1$ s.a. $\phi(P) \neq Q \quad \forall P \in C_2$. Skriv $\phi = \phi_f$ for $f \in \overline{K}(C_1)$

- Case 1: $Q = [1:0] = \infty \in \mathbb{P}^1$. Da er $f$ definert i alle $P \in C_1 \Rightarrow f$ er konstant.
- Case 2: $Q = [a:1]$. Da er $f(P) \neq a$ for alle $P \in C_1$. Da er $(f-a)$ uten nullpunkter $\Rightarrow (f-a)^{-1}$ er uten poler $\Rightarrow (f-a)^{-1}$ er konstant. $\Rightarrow f$ er konstant.

---

<u>„Kurver er kropper"</u> <u>Def.</u> Gitt en kroppsutvidelse $K \subset L$, er transcendensgraden $\mathrm{Tr.deg.}\, L/K$ største $n$ slik at $\exists$ inklusjon $K \subset K(x_1, \ldots, x_n) \hookrightarrow L$.

Hvis $L$ er endelig generert kroppsutvidelse av $K$, med

$\text{tr.deg.}(L/K) = n$, så er $L/K(x_1,\dots,x_n)$ endelig.
Hvis $V$ varietet, er $\text{tr.deg.}\,\bar{K}(V)/\bar{K} = \dim V$.

<u>Def</u> Hvis $L/K$ og $L'/K$ er kroppsutvidelser, sier vi $\iota : L \to L'$ er <u>definert over $K$</u> hvis $\iota(x) = x$ $\forall x \in K$.

---

La $\phi : C_1 \to C_2$ være ikkekonstant morfi. Dette induserer

$$\phi^* : \bar{K}(C_2) \to \bar{K}(C_1) \quad (\text{over } \bar{K})$$
$$f \longmapsto f \circ \phi.$$

<u>Prop</u>: Kroppsutvidelsen $\bar{K}(C_1)/\phi^*(\bar{K}(C_2))$ er endelig.

<u>Bevis</u>: Velg $x \in \bar{K}(C_2) \setminus \bar{K}$. Da er $x$ ikke algebraisk over $\bar{K}$ ($\bar{K}$ er alg. lukket) $\rightsquigarrow$ $\bar{K}(x) \subset \bar{K}(C_2)$. Får kjede

$$\phi^*\bar{K}(x) \subset \phi^*\bar{K}(C_2) \subset \bar{K}(C_1).$$

Siden $\text{tr.deg.}\,\bar{K}(C_1)/\bar{K} = 1$ er $\bar{K}(C_1)$ endelig over $\phi^*\bar{K}(x)$, så endelig over $\phi^*\bar{K}(C_2)$.

<u>Eksempel</u>: For $\mathbb{P}^1$, med koordinater $[X:Y]$, $\bar{K}(\mathbb{P}^1) = \bar{K}(x)$, med $x = \frac{X}{Y}$.
La $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ gitt ved

$$\phi(X:Y) = [X^n : Y^n]$$

Da er $\phi^*(x) = x^n$ så $\phi^*\bar{K}(\mathbb{P}^1) = \bar{K}(x^n) \subset \bar{K}(x)$.

---

$\bar{K}(C_2) \cong \phi^*(\bar{K}(C_2)) \subset \bar{K}(C_1)$ $\qquad$ $\bar{K}(C_1)/\bar{K}(C_2)$ er endelig.

<u>Prop</u>: La $\iota : \bar{K}(C_2) \hookrightarrow \bar{K}(C_1)$ være homomorfi av kropper over $\bar{K}$. Da fins en unik morfi $\phi : C_1 \to C_2$ s.a. $\iota = \phi^*$.

<u>Bevis</u>: La $C_2 \subset \mathbb{P}^N$, for $i = 1,\dots,N$, la $g_i = \frac{X_i}{X_0} \in \bar{K}(C_2)$.

$\overline{K}[C_2]$ er generert av $X_0, \ldots, X_N$

$\overline{K}(C_2)$ er generert som kropp over $\overline{K}$ av $\frac{X_i}{X_j}$

$\Rightarrow$ generert av $\{g_i\}$ over $\overline{K}$.

Så en morfi $\phi: C_1 \to C_2$ har $\phi^* = \iota \Leftrightarrow \phi^*(g_i) = \iota(g_i)$

$\phi = [f_0 : \cdots : f_N]$

Altså er
$$\iota(g_i) = \phi^*(g_i) = g_i \circ \phi = \left(\frac{X_i}{X_0}\right) \circ \phi = \frac{f_i}{f_0},$$ så må ha

$$\phi = [f_0 : \cdots : f_N] = \left[1 : \frac{f_1}{f_0} : \frac{f_2}{f_0} : \cdots : \frac{f_N}{f_0}\right] = [1 : \iota(g_1) : \cdots : \iota(g_N)].$$

Kan sjekke at dette gir morfi $\phi: C_1 \to C_2$.

---

<u>Prop</u>: Hvis $L/\overline{K}$ er kroppsutvidelse med tr.deg. $L/\overline{K} = 1$, da finnes unik ikkesingulær kurve $C$ og kroppisomorfi over $\overline{K}$, $L \cong \overline{K}(C)$.

---

<u>Oppsummert</u>: Ikkesingulære kurver, og ikkekonstante morfier mellom dem.

$\Updownarrow$

Kropper $L/\overline{K}$, tr.deg. $L/\overline{K} = 1$, og homomorfier over $\overline{K}$.

---

Kan definere egenskaper til en morfi $\phi: C_1 \to C_2$ vha. egenskaper til $\phi^*: \overline{K}(C_2) \to \overline{K}(C_1)$, (f.eks separabel)

<u>Definisjon</u>: For $\phi: C_1 \to C_2$ en morfi av kurver, er $\deg \phi = 0$ hvis $\phi$ er konstant, og

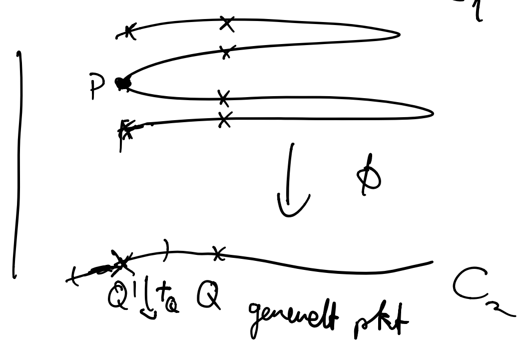
$$\deg \phi = [\bar{K}(C_1) : \phi^*(\bar{K}(C_2))].$$

<u>Eks</u> For $\phi = [X^n : Y^n] : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, er utvidelsen

$$\phi^* \bar{K}(x) = \bar{K}(x^n) \subset \bar{K}(x)$$

"Omtrent:" $\deg \phi = |\phi^{-1}(Q)|$ for generelt pkt. $Q$.

$\rightsquigarrow \deg \phi = n.$




<u>Definisjon</u> La $\phi : C_1 \to C_2$ være morfi, la $P \in C_1$, $Q = \phi(P)$, la $t_Q$ være en lokal parameter for $C_2$ i $Q$.

Da er ramifikasjonsindeksen til $\phi$ i $P$ er

$$e_\phi(P) = \operatorname{ord}_P(\phi^* t_Q).$$

Vi sier $\phi$ er ramifisert i $P$ hvis $e_\phi(P) > 1$.

<u>Prop</u>: For alle $Q \in C_2$, så er

$$\sum_{P \in \phi^{-1}(Q)} e_\phi(P) = \deg \phi.$$

$t_Q \in \bar{K}[C_2]_Q \qquad m_Q = (t_Q)$

$\operatorname{ord}_P(\phi^*(t_Q)), \qquad \phi^* : \bar{K}(C_2) \to \bar{K}(C_1)$

$$\phi^* : \bar{K}[C_2]_Q \longrightarrow \bar{K}[C_1]_P \qquad n = e_\phi(P)$$

$$t_Q \longmapsto \phi^*(t_Q) = t_P^{n} \cdot g$$

$$g(P) \neq 0.$$

<u>Eksempel</u> $\phi = [X^n : Y^n] : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$,

$$e_\phi(P) = 1 \quad \text{for } P \neq [0:1], [1:0]$$

$$e_\phi([1:0]) = e_\phi([0:1]) = n.$$

For $[0:1]$. $\phi([0:1]) = [0:1] = Q$. Kan ta $t_Q = x = \frac{X}{Y}$

$\phi^*(t_Q) = x^n$, $\mathrm{ord}_{[0:1]}(x^n) = \underline{\underline{n}}$.