For ordens skyld: Vi utsetter alt med “Frobenius-avbildningen”, “separable/inseparable morfier” til senere – dette er karakteristikk p-fenomener.

0.1. **Divisorer.** La C være en ikkesingulær kurve.

Definisjon. Divisorgruppen $\mathrm{Div}(C)$ er den frie abelske gruppen generert av punktene til C.

Altså: Et element $D \in \mathrm{Div}(C)$ skrives som en sum

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i P_i, \qquad n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in C.$$

Vi setter

$$\deg D = \sum n_i,$$

og

$$\mathrm{Div}^0(C) = \{D \in \mathrm{Div}(C) \mid \deg(D) = 0\}.$$

Definisjon. Hvis $f \in \overline{K}(C)^*$, definer divisoren

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f) P.$$

Siden $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$, gir dette en gruppehomomorfi

$$\mathrm{div} \colon \overline{K}(C)^* \to \mathrm{Div}(C).$$

Definisjon. En divisor $D \in \mathrm{Div}(C)$ er *prinsipal* hvis det finnes en $f \in \overline{K}(C)^*$ slik at $D = \mathrm{div}(f)$.

To divisorer D_1, D_2 er *lineært ekvivalente* ($D_1 \sim D_2$), hvis $D_1 - D_2$ er prinsipal.

Picard-gruppa til C, skrives $\mathrm{Pic}(C)$, er definert ved

$$\mathrm{Div}(C)/\mathrm{div}(\overline{K}(C)^*),$$

altså er elementene “divisorer opp til lineær ekvivalens”.

Proposisjon. *For alle $f \in \overline{K}(C)^*$, har vi*

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0,$$

mao. har vi $\mathrm{div}(\overline{K}(C)^*) \subset \mathrm{Div}^0(C)$.

Bevis. Fra definisjonene er $\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f) = 0$. □

Definisjon. Definerer

$$\mathrm{Pic}^0(C) = \mathrm{Div}^0(C)/\mathrm{div}(\overline{K}(C)^*).$$

Eksempel. Alle $D \in \mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1)$ er prinsipale, altså er $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}^1) = 0$.

Bevis: La $D = \sum n_{P_i} P_i + n_\infty P_\infty$, med $P_i = [a_i : 1]$, $P_\infty = [1 : 0]$, og $\sum n_i + n_\infty = 0$. Bruker $\overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x)$, og ser på

$$f = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{n_i}.$$

Da er (tidligere forelesning!)

$$\mathrm{ord}_{P_i}(f) = n_i \quad \forall i, \quad \mathrm{ord}_{P_\infty}(f) = -\sum n_i = n_\infty, \quad \mathrm{ord}_P(f) = 0 \text{ ellers.}$$

Dette betyr at $\mathrm{div}(f) = D$.

Eksempel. La $C \subseteq \mathbb{P}^2$ være kurven gitt ved

$$y^2 - (x^3 - x) = 0, \qquad \text{dvs.} ZY^2 - (X^3 - Z^2 X) = 0.$$

Kurven er ikkesingulær og har ett punkt i uendelig (dvs. med koordinater $[a : b : 0]$), nemlig $P_\infty = [0 : 1 : 0]$.

Vi har $y = Y/Z \in \overline{K}(C)$. Da er

$$\mathrm{div}(y) = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_\infty,$$

hvor $P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 0), P_3 = (-1, 0)$. Dette fordi y er definert i alle punkter unntatt P_∞, og forsvinner i P_i, med $\mathrm{ord}_{P_i}(y) = 1$. Siden $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$, må vi ha med $-3P_\infty$.

Definisjon. La $\phi \colon C_1 \to C_2$ være en ikkekonstant morfi av kurver. Vi definerer homomorfier

$$\phi_* \colon \mathrm{Div}(C_1) \to \mathrm{Div}(C_2) \qquad \phi^* \colon \mathrm{Div}(C_2) \to \mathrm{Div}(C_1)$$

ved

$$\phi_*(P) = \phi(P) \qquad \phi^*(Q) = \sum_{P \in \phi^{-1}(Q)} e_\phi(P) P,$$

og utvider disse $\mathbb{Z}$-lineært.

Eksempel. Hvis $\phi \colon C \to \mathbb{P}^1$ er gitt ved $\phi = [f : 1]$, med $f \in \overline{K}(C)$, så er

$$\mathrm{div}(f) = \phi^*([0] - [\infty])$$

Proposisjon. *La $\phi \colon C_1 \to C_2$ være en ikkekonstant morfi av kurver. Da har vi*

- $\deg(\phi^* D) = \deg(\phi) \deg(D) \quad \forall D \in \mathrm{Div}(C_2)$.
- $\phi^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\phi^*(f)) \quad \forall f \in \overline{K}(C_2)^*$.
- $\deg(\phi_*(D)) = \deg D \quad \forall D \in \mathrm{Div}(C_1)$.
- $\phi_*(\phi^*(D)) = \deg \phi \cdot D \quad \forall D \in \mathrm{Div}(C_2)$.
- *Hvis $\psi \colon C_2 \to C_3$ er en morfi av ikkesingulære kurver, så er*

$$\psi_* \circ \phi_* = (\psi \circ \phi)_* \qquad \phi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi)^*.$$

Differensialer.

Definisjon. La C være en ikkesingulær kurve. Definer vektorrommet av differensialer som $\overline{K}(C)$-vektorrommet utspent av symboler df for alle $f \in \overline{K}(C)$, med relasjoner

- $d(f+g) = df + dg$.
- $d(fg) = fdg + gdf$.
- $da = 0$ for $a \in \overline{K}$.

Merknad. Et differensial er *ikke* en funksjon på C, men et differensial $\omega \in \Omega_C$ bestemmer og er bestemt av en tilordning som for nesten alle $P \in C$ gir et element $\omega(P) \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

F. eks., la $f \in \overline{K}(C)$. Hvis f er definert i P, så vil $f - f(P) \in \mathfrak{m}_P$, og dermed definere et element i $df(P) = f - f(P) \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Generelt blir $gdf(P) = g(P)df(P) \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ hvis f, g er definert i P.

Oppgave: Sjekk at hvis $f, g \in \overline{K}[C]_P$, så er

$$d(fg)(P) = g(P)df(P) + f(P)dg(P) \in \mathfrak{m}_P/(\mathfrak{m}_P)^2.$$

Proposisjon. *Vektorrommet Ω_C er 1-dimensjonalt som $\overline{K}(C)$-vektorrom.*

Hvis $\operatorname{char} K = 0$*, så er $df \neq 0$ for alle ikkekonstante $f \in \overline{K}(C)$.*

Eksempel. Hvis $\operatorname{char} K = p$ og $f \in \overline{K}(C)$, så er $d(f^p) = pf^{p-1}df = 0$.

Proposisjon. *La C være en kurve, la $P \in C$, la $t \in \overline{K}(C)$ være en lokal parameter i P, og anta at* $\operatorname{char} K = 0$.

(1) *For alle $\omega \in \Omega_C$ finnes en unik funksjon $g \in \overline{K}(C)$ slik at*
$$\omega = gdt.$$
Vi skriver $g = \omega/dt$.

(2) *Hvis $f \in \overline{K}(C)$ er regulær i P, så er df/dt regulær i P.*

(3) *La $\omega \in \Omega_C \setminus 0$. Da er*
$$\operatorname{ord}_P(\omega) := \operatorname{ord}_P(\omega/dt)$$
veldefinert (altså uavhenging av valg av t).

(4) *La $x, f \in \overline{K}(C)$, og la $x(P) = 0$. Hvis* $\operatorname{char} K = 0$*, så er*
$$\operatorname{ord}_P(fdx) = \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_P(x) - 1.$$

(5) *La $\omega \in \Omega_C$. Da er* $\operatorname{ord}_P(\omega) = 0$ *unntatt i endelig mange P.*

Definisjon. Vi sier at ω er *definert* i P hvis $\operatorname{ord}_P(\omega) \geq 0$.

Hvis ω er definert i P, så er $\omega(P) = (\omega/dt)(P)dt(P) \in \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ veldefinert.

Bevis. (1): Dette følger av $\Omega_C \cong \overline{K}(C)$ og $dt \neq 0$.

(2): Hoppes over

(3): La t, t' være lokale parametere i P. Ved (2) er dt/dt' og dt'/dt begge regulære i P, dermed er

$$\mathrm{ord}_P(dt/dt') = \mathrm{ord}_P(dt'/dt) = 0,$$

så $\mathrm{ord}_P(\omega/dt) = \mathrm{ord}_P(\omega/dt' \cdot (dt'/dt)) = \mathrm{ord}_P(\omega/dt)$.

(4): Holder å vise $\mathrm{ord}_P(dx) = \mathrm{ord}_P(x) - 1$. Skriv $x = ut^n$, med $\mathrm{ord}_P(u) = 0$. Da er

$$dx = nt^{n-1}udt + t^n du = (nut^{n-1} + t^n du/dt)dt.$$

Her er $\mathrm{ord}_P(nut^{n-1}) = n - 1$ (siden $n \neq 0$), og $\mathrm{ord}_P(t^n du/dt) \geq n$. Dermed er

$$\mathrm{ord}_P(nut^{n-1} + t^n du/dt) = n - 1.$$

(5): Hoppes over. $\square$