Sist: Gitt kurve C, definerte gruppa av divisorer $\mathrm{Div}(C)$, og Picard-gruppa $\mathrm{Pic}(C) = \mathrm{Div}(C)/\mathrm{div}(\overline{K}(C)^*)$.

Definerte rommet av *differensialer* Ω_C.

For et differensial $\omega \in \Omega_C$, definerte vi ordenenen

$$\mathrm{ord}_P(\omega) = \mathrm{ord}_P(f)$$

hvor

$$\omega = f dt$$

med t er en lokal parameter i P. På samme måte som for funksjoner, kan vi nå definere en divisor

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(\omega) P \in \mathrm{Div}(C).$$

Proposisjon. *Hvis $0 \neq \omega_1, \omega_2 \in \Omega_C$, så er $\mathrm{div}(\omega_1) \sim \mathrm{div}(\omega_2)$.*

Bevis. Gitt ω_1 og ω_2, har vi en $f \in \overline{K}(C)^*$ slik at $\omega_1 = f\omega_2$. Da er $\frac{\omega_1}{dt} = \frac{f\omega_2}{dt} = f\frac{\omega_2}{dt}$, som betyr at

$$\mathrm{ord}_P(\omega_1) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(\omega_2).$$

Dermed

$$\mathrm{div}(\omega_1) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega_2),$$

så $\mathrm{div}(\omega_1) \sim \mathrm{div}(\omega_2)$. $\square$

Definisjon. Den *kanoniske divisorklassen* er bildet i $\mathrm{Pic}(C)$ av $\mathrm{div}(\omega)$, vi skriver K_C.

En divisor D slik at divisorklassen til D er K_C kalles *kanonisk.*

Merknad. Dette er kjempebra! Nå har vi, helt uten å gjøre noen valg, fått definert et element i Picard-gruppen, som vi kan bruke til å si ting om kurven.

Proposisjon. *La $C = \mathbb{P}^1$. Vi har $K_{\mathbb{P}^1} = -2(\infty) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$.*

Bevis. La $\omega = dx$, og $\alpha \in \overline{K}$. I punktet $[\alpha : 1]$, så er $x - \alpha$ en lokal parameter, og vi har

$$dx = d(x - \alpha),$$

så $\mathrm{ord}_P\, dx = 0$. I punktet $\infty = [1 : 0]$, så er x^{-1} en lokal parameter. Siden $d(x^{-1}) = -x^{-2}dx$, så er $dx = -x^2 d(x^{-1})$, og $\mathrm{ord}_\infty(dx) = -2$. $\square$

Merknad. For alle punkter $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1$, så er $P_1 - P_2$ prinsipal (fra forrige forelesning). Dermed er $\infty \sim P$ for alle $P \in \mathbb{P}^1$, og vi har altså også $K_{\mathbb{P}^1} = -P_1 - P_2 \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$ for vilkårlige $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1$.

Korollar. *Hvis $\omega \in \Omega_{\mathbb{P}^1}$ er regulær i alle $P \in \mathbb{P}^1$, så er $\omega = 0$.*

Bevis. Hvis $\mathrm{ord}_P(\omega) \geq 0$ for alle P, så er $\mathrm{div}(\omega) = \sum n_i P_i$ med $n_i \geq 0$, så $\deg(\mathrm{div}(\omega)) = \sum n_i \geq 0$. Men $\deg(\mathrm{div}(\omega)) = \deg(K_{\mathbb{P}^1}) = -2$. $\square$

Eksempel. La $C \subset \mathbb{P}^1$ være kurven definert av $y^2 - (x^3 - x) = 0$, og la $P_1 = (-1, 0), P_2 = (0, 0), P_3 = (1, 0), P_\infty = [0 : 1 : 0]$.

For differensialet $dx \in \Omega_C$, har vi

$$\mathrm{ord}_P(dx) = 0, \qquad P \in C \setminus P_1, P_2, P_3,$$

siden $\mathrm{ord}_P(x - x(P)) = 1$ for slike P.

Har

$$\mathrm{ord}_{P_1}(dx) = \mathrm{ord}_{P_2}(dx) = \mathrm{ord}_{P_3}(dx) = 1,$$

siden $\mathrm{ord}_{P_i}(x - x(P_i)) = 2$.

Har

$$\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = -2 \Rightarrow {}^1\,\mathrm{ord}_{P_\infty}(dx) = -3$$

Har også $\mathrm{ord}_{P_1}(y) = \mathrm{ord}_{P_2}(y) = \mathrm{ord}_{P_3}(y) = 1$, $\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = -3$, $\mathrm{ord}_P(y) = 0$ ellers.

La $\omega = dx/y$. Da er $\mathrm{ord}_P(\omega) = \mathrm{ord}_P(dx) - \mathrm{ord}_P(y) = 0$ for alle P, så $K_C = \mathrm{div}(\omega) = 0$.

Korollar. *Kurven C er ikke isomorf til $\mathbb{P}^1$.*

Riemann–Roch. Problem: Vi vet at en rasjonal funksjon f som er regulær i alle punkter er konstant.

Hva med "litt" ikke-regulære funksjoner? Gitt en kurve C, noen punkter $P_1, \dots, P_i$, og noen tall $m_1, \dots, n_i \geq 0$, kan vi beskrive mengden av rasjonale funksjon som bare har poler i P_i, med pol-orden $\leq n_i$?

Riemann–Roch gir veldig presis informasjon om dimensjonen på dette rommet av funksjoner. Vi introduserer først litt notasjon.

Definisjon. En divisor D er *effektiv*, skriver $D \geq 0$, hvis $D = \sum n_i P_i$ med $n_i \geq 0$. Mer generelt, skriver vi $D_1 \geq D_2$ hvis $D_1 - D_2 \geq 0$.

Eksempel. La $P \in C$, $n \geq 0$, og $f \in \overline{K}(C)$.

$\mathrm{div}(f) \geq -n(P) \Leftrightarrow f$ er regulær på $C \setminus P$, og har (i verste fall) en pol av orden $\leq n$ i P.

Mer generelt, gitt $Q \in C$, $m \geq 0$, så er $\mathrm{div}(f) \geq m(Q) - n(P) \Leftrightarrow f$ er regulær på $C \setminus P$, har en pol av orden $\leq n$ i P, og et nullpunkt av orden $\geq m$ i Q.

Definisjon. La $D \in \mathrm{Div}(C)$. Vi definerer $\overline{K}$-vektorrommet

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \overline{K}(C) \mid \mathrm{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}$$

Dette er endeligdimensjonalt, og vi lar $l(D) = \dim_{\overline{K}} \mathcal{L}(D)$.

---

[1]Her jukser vi litt og antar $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Hvis t er lokal parameter i P_∞, så er $x = ft^{-2}$ med f regulær og ikke null i P_∞. Har da $dx = dft^{-2} - 2t^{-3}fdt$, som hvis $2 \neq 0$ impliserer at $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = \mathrm{ord}_{P_\infty}(2t^{-3}fdt) = -3$.

Eksempel. $f \in \mathcal{L}(0)$ hvis og bare hvis f er regulær overalt, som skjer hvis og bare hvis f er konstant.

Altså er $\mathcal{L}(0) = \overline{K} \subset \overline{K}(C)$, $l(0) = 1$.

Teorem. (1) *Hvis* $\deg D < 0$*, så er* $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

(2) *Hvis* $D' \sim D$*, så er* $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}(D')$*, og altså* $l(D) = l(D')$.

Bevis. (1): Hvis $f \in \mathcal{L}(D)$, så er $\operatorname{div}(f) \geq -D$, og dermed er

$$0 = \deg(\operatorname{div}(f)) \geq \deg(-D) = -\deg(D) > 0.$$

(2): Hvis $D = D' + \operatorname{div}(g)$, og $f \in \mathcal{L}(D)$, så er $gf \in \mathcal{L}(D')$, siden

$$\operatorname{div}(gf) = \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f) \geq \operatorname{div}(g) - D = -(D - \operatorname{div}(g)) = -D'.$$

Motsatt, hvis $f \in \mathcal{L}(D')$, så er $g^{-1}f \in \mathcal{L}(D)$, og vi har $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}(D')$. $\square$

Eksempel. La $\omega \in \Omega_C$, og la $K_C = \operatorname{div}(\omega) \in \operatorname{Div}(C)$. Da er $f \in \mathcal{L}(K_C)$ hvis og bare hvis

$$\operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(f\omega) \geq 0 \Leftrightarrow f\omega \in \Omega_C \text{ er regulær overalt.}$$

Altså er $\mathcal{L}(K_C)$ identifisert med rommet av regulære differensialer.

Definisjon. Tallet $g(C) = l(K_C)$ kalles *genus* til C.

Eksempel. Vi har vist at $\mathcal{L}(K_{\mathbb{P}^1}) = \{0\}$, så $g(\mathbb{P}^1) = l(K_C) = 0$.

For kurven C gitt ved $y^2 - (x^3 - x)$, har vi vist at $K_C = 0$, så $g(C) = l(K_C) = l(0) = 1$.

Teorem (Riemann–Roch)**.** *La C være en ikkesingulær kurve og la K_C være en kanonisk divisor. For en divisor D, har vi*

$$l(D) - l(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1$$

Korollar. (1) $\deg K_C = 2g(C) - 2$.

(2) *Hvis* $\deg D > \deg K_C$*, så er*

$$l(D) = \deg D - g(C) + 1.$$

Bevis. (1) Sett $D = K_C$. Da er

$$l(K_C) - l(0) = \deg(K_C) - g(C) + 1.$$

Vi har $l(0) = 1$, og $l(K_C) = g(C)$, som gir resultatet. (2) Hvis $\deg D > \deg K_C$, så er $\deg(K_C - D) < 0 \Rightarrow l(K_C - D) = 0$. $\square$

Vi tar med, i forbifarten, følgende formel som relaterer genus til ulike kurver med en morfi mellom seg:

Teorem (Hurwitz)**.** *La* $\phi\colon C_1 \to C_2$ *være en ikkekonstant morfi av kurver, og anta* $\operatorname{char} K = 0$*. Da er*

$$\deg(\phi)(2g(C_2) - 2) + \sum_{P \in C_1} (e_\phi(P) - 1) = 2g(C_1) - 2.$$

Eksempel. Ta kurven C gitt ved $y^2 - (x^3 - x) = 0$, og la $\phi = [x : 1]\colon C \to \mathbb{P}^1$. Da er $e_\phi(P) = 1$, unntatt for P_1, P_2, P_3, P_∞, hvor $e_\phi(P_i) = 2$.

Vi har $\deg \phi = 2$, $g(C) = 1$, $g(\mathbb{P}^1) = 0$, og ser at dette stemmer med Hurwitz' teorem.