Vi skal nå se på det spesielle tilfellet hvor $K = \overline{K} = \mathbb{C}$, og se at vi kan beskrive slike komplekse elliptiske kurver på en annen (og på sett og vis enklere) måte.

Gitter i det komplekse planet

Definisjon. Et **gitter** i det komplekse planet er en undergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ hvor $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$.

TEGNING AV ET GITTER

Et gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ er typisk definert ved å spesifisere to generatorer ω_1, ω_2 av Λ.

Vi kan se på det topologiske kvotientrommet $\mathbb{C}/\Lambda$. Vi skal forstå, og delvis vise: Punktene til en elliptisk kurve E over $\mathbb{C}$ er i bijeksjon med $\mathbb{C}/\Lambda$ for et eller annet gitter Λ.

TEGNING AV EN TORUS

For å relatere $\mathbb{C}/\Lambda$ til E, trenger vi noen funksjoner på $\mathbb{C}/\Lambda$.

Definisjon. En **elliptisk funksjon** (relativ til Λ) på $\mathbb{C}$ er en *meromorf* funksjon $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ slik at for alle $\omega \in \Lambda$, har vi

$$f(z + \omega) = f(z)$$

Mengden av elliptiske funksjoner danner en kropp, som vi kaller $\mathbb{C}(\Lambda)$.

En elliptisk funksjon f definerer en funksjon på $\mathbb{C}/\Lambda$, som vi også kaller f.

Definisjon. Et **fundamentalområde** for Λ er en mengde på formen

$$D = \{a + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$$

hvor $a \in \mathbb{C}$ og $\{\omega_1, \omega_2\}$ genererer Λ.

Hvis $D \subset \mathbb{C}$ er et fundamentalområde, så inneholder D ett element for hver restklasse til Λ, så den naturlige avbildningen $D \to \mathbb{C}/\Lambda$ er en bijeksjon.

Proposisjon. *La f være en elliptisk funksjon. Hvis f er holomorf, så er f konstant.*

Bevis. Velg et fundamentalområde $D \subset \mathbb{C}$. Siden $\overline{D}$ er kompakt og f er holomorf, så finnes en N slik at $|f(z)| \leq N$ for alle $z \in \overline{D}$. Men for alle $z \in \mathbb{C}$ finnes en $\omega \in \Lambda$ slik at $z + \omega \in \overline{D}$, og dermed er $|f(z)| \leq N$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Dermed er f en holomorf, begrenset funksjon på f, og dermed konstant (Liouvilles teorem). $\square$

Definisjon. La f være en meromorf funksjon på $\mathbb{C}$, og la $w \in \mathbb{C}$.

Vi lar $\operatorname{ord}_w(f)$ være **forsvinningsordenen** til f i w, og lar $\operatorname{res}_w(f)$ være **residyen** til f i w.

Dvs. i Laurent-utvidelsen til f om w,

$$f(z) = a_n(z - w)^n + a_{n+1}(z - w)^{n+1} + \cdots,$$

har vi $\operatorname{ord}_w(f) = n$ og $\operatorname{res}_w(f) = a_{-1}$.

Hvis f er elliptisk, $w \in \mathbb{C}$ og $\omega \in \Lambda$, så er

$$\mathrm{ord}_{w+\omega}(f) = \mathrm{ord}_w(f), \quad \mathrm{res}_w(f) = \mathrm{res}_{w+\omega}(f).$$

Dermed gir det mening å snakke om $\mathrm{ord}_w(f), \mathrm{res}_w(f)$ for $w \in \mathbb{C}/\Lambda$.

Proposisjon. *La f være en elliptisk funksjon.*

(1) $\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{res}_w(f) = 0$.

(2) $\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_w(f) = 0$.

Bevis. 1): For alle fundamentalområder $D \subset \mathbb{C}$ har vi

$$\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{res}_w(f) = \sum_{w \in D} \mathrm{res}_w(f).$$

Velg et fundamentalområde D slik at f ikke har noen poler på randa til D.

Cauchys residyteorem sier at

$$\sum_{w \in D} \mathrm{res}_w(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz,$$

men siden f er elliptisk, vil bidraget fra motstående sider i parallellogrammet D kansellere, så $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.

2): Vi har at $\mathrm{ord}_w(f) = \mathrm{res}_w(\frac{f'}{f})$. Siden $\frac{f'}{f}$ er elliptisk, følger 2) da fra 1). $\square$

Definisjon. Ordenen til en elliptisk funksjon f er antall poler til f i et fundamentalområde, talt med multiplisitet.

Siden $\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_w(f) = 0$, har en elliptisk funksjon av orden d også d nullpunkter, talt med multiplisitet.

Proposisjon. *En ikkekonstant elliptisk funksjon f har orden ≥ 2.*

Bevis. Hvis f har orden 0, er den holomorf, dermed konstant.

Anta for en motsigelse at f har orden 1. Da har den en enkelt pol i et punkt $w_0 \in D$. Det betyr at

$$\sum_{w \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{res}_w(f) = \mathrm{res}_{w_0}(f) \neq 0,$$

som er umulig. $\square$

Eksempler på elliptiske funksjoner

Vi vil nå lage noen elliptiske funksjoner.

Vi veit at hvis f ikke er konstant, så må den ha orden ≥ 2, så la oss prøve å lage en med orden 2. La oss si at den skal ha en dobbel pol i 0. Vi kan prøve

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^2}.$$

Denne formelen tilfredsstiller opplagt $f(z) = f(z+\omega)$ for alle $\omega \in \Lambda$. Ett problem: Rekka viser seg å ikke konvergere.

I stedet ser man på:

Definisjon. Weierstrass $\wp$-funksjon er funksjonen

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Proposisjon. *(1) Rekka som definerer $\wp$ konvergerer uniformt, så $\wp$ er veldefinert.*

(2) $\wp$ er en jevn elliptisk funksjon.

Vi kan nå lage en ny elliptisk funksjon ved å derivere:

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in \Lambda} -2 \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Siden $\wp$ er elliptisk, så er $\wp'$ elliptisk. Den er en odde funksjon.

Merknad. Alle elliptiske funksjoner kan uttrykkes som en rasjonal funksjon av $\wp$ og $\wp'$ – med andre ord er kroppen $\mathbb{C}(\Lambda)$ generert over $\mathbb{C}$ av $\wp$ og $\wp'$.

Relasjonen mellom $\wp$ og $\wp'$. Siden $\wp(z)$ er jevn og $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ konvergerer mot 0 når z går mot 0, har vi Laurent-rekke-utvidelsen

$$\wp(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots,$$

og dermed at

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 2a_2 z + \cdots$$

Proposisjon. *Det finnes tall $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ (avhengig av Λ) slik at for alle $z \in \mathbb{C}/\Lambda \setminus \{0\}$ har vi*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

Bevis. Gitt en meromorf funksjon f med Laurent-rekke

$$f(z) = \sum_{n \geq \mathrm{ord}_0(f)} a_n z^n,$$

er *prinsipaldelen* $\mathcal{P}(f)$ leddene med negativ z-eksponent, dvs. $\sum_{n=\mathrm{ord}_0(f)}^{0} a_n z^n$.

Ser vi på funksjonene $\wp'(z)^2$, $\wp(z), \wp(z)^3$, kan prinsipaldelene skrives som

$$\mathcal{P}(\wp'(z)^2) = 4z^{-6} - 8a_2 z^{-2}$$
$$\mathcal{P}(\wp(z)) = z^{-2}$$
$$\mathcal{P}(\wp(z)^3) = z^{-6} + 3a_2 z^{-2},$$

Det finnes dermed en g_2 slik at $h(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z)$ har prinsipaldel 0. Funksjonen $h(z)$ er elliptisk, og kan bare ha poler i $w \in \Lambda$. Men siden $\mathcal{P}(h(z)) = 0$, har h ikke pol i 0. Dermed er h holomorf, dermed konstant, og vi kan sette $g_3 = h$.[1] $\square$

[1] Eksplisitte formler for g_2 og g_3 som en funksjon av Λ kan gis, og disse viser seg å være såkalte *modulære former*.