(*) = Vanskelig oppgave og/eller ekstramateriale litt på siden av hoveddelen av stoffet.

(**) = Skikkelig vanskelig.

1. Uke 15.2-21.2, Kap. 1.1-1.2. i [Sil09]

Fra Silverman, oppgaver 1.1, 1.2 og 1.3 (men se [EO] side 137–141 for en grundigere gjennomgang av påstanden i 1.3).

Noen oppgaver om varieteter definert over K og K-rasjonale punkter.

(1) Beskriv de K-rasjonale punktene $V(K)$ til varieteten $V \subset \mathbb{A}^2$ definert av idealet $I = (x^2 - 2y^2)$ når K er $\mathbb{Q}$ og når $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(2) La $V \subset \mathbb{A}^n$ være en algebraisk mengde. Vi har definert $I(V/K) = I(V) \cap K[X_1, \ldots, X_n]$. Vis at V er definert over K hvis og bare hvis $I(V)$ er idealet i $\overline{K}[X_1, \ldots, X_n]$ generert av mengden $I(V/K)$. (Dette er Remark 1.2. i [Sil09].)

(3) Vis at hvis $V \subset \mathbb{A}^n$ er en affin varietet definert over K, så er $I(V/K)$ er primideal av $K[X_1, \ldots, X_n]$.

(4) Gi et eksempel på en algebraisk mengde $V \subset \mathbb{A}^1$, definert over K, slik at $I(V/K)$ er et primideal i $K[X_1, \ldots, X_n]$, men slik at $I(V)$ ikke er et primideal i $\overline{K}[X_1, \ldots, X_n]$. (Med andre ord: For å sjekke at V er en varietet holder det ikke å sjekke at $I(V/K)$ er prim.)

(5) For $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ eller $\mathbb{F}_p$, gi eksempler på en ikketom algebraisk mengde $V \subset \mathbb{A}^1$ slik at $V(K) = \varnothing$.

(6) Vis at hvis K ikke er algebraisk lukket, så finnes en ikketom algebraisk mengde $V \subset \mathbb{A}^1$ such that $V(K) = \varnothing$.

(7) For $K = \mathbb{R}$, gi et eksempel på en ikketom affin varietet V slik at $V(K) = \varnothing$.

(8) For $K = \mathbb{F}_7$, bevis at den algebraiske mengden $V(X^3 + Y^3 - 3) \subset \mathbb{A}^2$ er en varietet og $V(K) = \varnothing$.

(9) (*) Vår definisjon av når en algebraisk mengde $V \subset \mathbb{A}^n$ er definert over K er en betingelse på idealet $I(V)$. Det viser seg at dette også kan formuleres som en betingelse på punktene til V, på følgende måte.

La $G = \mathrm{Gal}_{\overline{K}/K}$, Galois-gruppa til $\overline{K}$ over K, altså gruppa av kroppisomorfier $\sigma\colon \overline{K} \to \overline{K}$ slik at for alle $x \in K$, så $\sigma(x) = x$. Gruppa G virker på punktene til $\mathbb{A}^n$ koordinatvis

$$(\sigma, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)).$$

La nå $V \subset \mathbb{A}^n$ være en algebraisk mengde. Da er V definert over K hvis og bare hvis G-virkningen sender V til V, dvs. "for alle $\sigma \in G$ og $P \in V$, har vi $\sigma(P) \in V$".

For eksempel, hvis $K = \mathbb{R}$, så er G gruppa med to elementer, og det ikketrivielle elementet virker på $\mathbb{C}$ ved komplekskonjugering $z \mapsto \bar{z}$. Dermed er en algebraisk mengde $V \subset \mathbb{A}^n$ definert over K hvis og bare hvis for alle $(x_1, \ldots, x_n) \in V$, har vi $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in V$.

La $V \subset \mathbb{A}^n$ være en algebraisk mengde.

- Vis at hvis V er definert over K, så vil G-virkningen sende V til V.
- La $K = \mathbb{R}$, og vis at hvis G-virkningen sender V til V, så er V definert over K.

- (**) La K være vilkårlig, og vis at hvis G-virkningen sender V til V, så er V definert over K. Du blir nødt til å bruke antagelsen at K er perfekt.

2. Uke 22.2-28.2, Kap. I.3–II.2 i [Sil09]

Fra [Sil09]: 1.6, 1.7, 1.8, 2.2, 2.3 a) i).

I 1.8, ta gjerne $q = p$ for et primtall p for enkelhets skyld. I punkt d) trenger man å vite at et element $x \in \overline{\mathbb{F}}_q$ ligger i $\mathbb{F}_q$ hvis og bare hvis $x^q = x$.

(1) La C være en ikkesingulær kurve, og la $P \in C$. Vis at hvis $f \in \overline{K}[C]_P$ er slik at $\dim_{\overline{K}} \overline{K}[C]_P/(f) = 1$, så er f en lokal parameter for C i P.

(2) La C være en ikkesingulær kurve, og la $P \in C$. Vis at hvis $f \in \overline{K}[C]_P$, så er

$$\mathrm{ord}_P(f) = \dim_{\overline{K}} \overline{K}[C]_P/(f).$$

Lokale parametere til plane kurver. For en plan kurve C, er det ofte lett å sjekke om en funksjon f er en lokal parameter i ett punkt:

(1) For $P = (a, b) \in \mathbb{A}^2$, la $T_{\mathbb{A}^2,P} = \overline{K}^2$, vi kaller dette tangentrommet til $\mathbb{A}^2$ i P. La $C \subset \mathbb{A}^2$ være kurven definert av ligningen $f \in \overline{K}[x, y]$, og anta at $P \in C$. Tangentrommet til C i P er vektorrommet

$$T_{C,P} = \{(\alpha, \beta) \in T_{\mathbb{A}^2,P} \mid \alpha\frac{\partial}{\partial x}(f(a, b)) + \beta\frac{\partial}{\partial y}(f(a, b)) = 0\} \subset T_{\mathbb{A}^2,P}.$$

Vis at C er ikkesingulær hvis og bare hvis $\dim_{\overline{K}} T_{C,P} = 1$.

(2) La $f, g \in \overline{K}[x, y]$, og la $C = V_f$, $D = V_g$. La $P = (a, b) \in C \cap D$. Vi sier at C og D er *transverse* i P hvis $\dim_{\overline{K}} T_{C,P} \cap T_{D,P} = 0$.
  - Vis at hvis
  $$(\overline{K}[x, y]/(f, g))_{(x-a,y-b)} \cong \overline{K},$$
  så er C og D transverse i P.
  - (*) Vis det motsatte: At hvis C og D er transverse i P, så er
  $$(\overline{K}[x, y]/(f, g))_{(x-a,y-b)} \cong \overline{K}.$$
  Du vil trenge Nakayamas lemma for dette.

(3) Vis at hvis $C \subset \mathbb{A}^2$ er en ikkesingulær kurve, og $f \in \overline{K}[x, y]$, så er f en lokal parameter for C i P hvis og bare hvis
  - $f(P) = 0$
  - $\frac{\partial}{\partial x}(f(a, b)) + \beta\frac{\partial}{\partial y}(f(a, b)) \neq 0$ når $0 \neq (\alpha, \beta) \in T_{C,P}$.

(4) La $a_1, \ldots, a_n \in \overline{K}$. Sjekk at kurven $C \in \mathbb{A}^2$ definert av

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

er ikkesingulær hvis og bare hvis alle a_i er distinkte.

(5) For kurven over, med a_i distinkte, sjekk at y er en lokal parameter i punktet $(a_i, 0)$

(6) For kurven over, med a_i distinkte, sjekk at $x - a_i$ *ikke* er en lokal parameter i punktet $(a_i, 0)$ (og beregn $\mathrm{ord}_{(a_i,0)}(x)$).

(7) Hvis $C \in \mathbb{A}^2$ er en ikkesingulær kurve og $P = (a, b) \in C$, vis at funksjonen $\alpha(x - a) + \beta(x - b)$ er en lokal parameter for C i P så lenge $(\beta, \alpha) \notin T_{C,P}$ (dvs: De *fleste* lineære funksjoner som forsvinner i P er lokale parametere).

Morfier av ikkesingulære kurver.

(1) Vi vet, men har ikke bevist, at en morfi av kurver $\phi\colon C \to D$ er enten surjektiv eller konstant. Her finner vi et delvis bevis, gitt følgende antakelse: Anta at for ethvert punkt $P \in D$, så finnes en $g \in \overline{K}(D)$ slik at g har en pol i P og er regulær i alle andre punkter (dette er ikketrivielt, men sant!). Bruk dette til å vise at ϕ er surjektiv ved å se på morfien $\phi_g \circ \phi\colon C \to \mathbb{P}^1$ og bruke at en morfi $C \to \mathbb{P}^1$ er konstant eller surjektiv (som vi viste i forelesning).

Ramifikasjonsindeks. Hvis $\phi\colon C \to D$ er en morfi av ikkesingulære kurver, har vi definert ramifikasjonsindeksen til ϕ i $P \in C$, med notasjon $e_\phi(P)$. Når $D = \mathbb{P}^1$, kan vi tenke på morfien som en rasjonal funksjon, og se at dette

(1) La $C = D = \mathbb{P}^1$, og la $\phi = [f : 1]$, med $f \in \overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x)$. Skriv $f = \prod_{i=1}^r (x - a_i)^{n_i}$ med distinkte a_i, og vis at

$$e_\phi([a_i : 1]) = \mathrm{ord}_{[a_i:1]}(f) = |n_i|.$$

(2) La $C = D = \mathbb{P}^1$, og la $\phi = [f : 1]$, med $f \in \overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x)$. Vis at hvis f er definert i P og $f(P) = a$, så er

$$e_\phi(P) = \mathrm{ord}_P(f - a).$$

(3) La C være en ikkesingulær kurve, la $D = \mathbb{P}^1$, og la $\phi\colon C \to D$ være en morfi med $\phi = [f : 1]$ for en $f \in \overline{K}(C)$. La P være slik at f er definert i P, og la $a = f(P)$. Vis at $e_\phi(P) = \mathrm{ord}_P(f - a)$.

(4) La $\phi = [f : 1]\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ være en morfi med $f \in \overline{K}(\mathbb{P}^1) = \overline{K}(x)$. Skriv $f = g/h$ med $g, h \in \overline{K}[x]$, og anta at g og h ikke har noen felles faktor. Vis at for alle $P \in \mathbb{P}^1$ har vi

$$\sum_{Q \in \phi^{-1}(P)} e_\phi(Q) = \max\{\deg g, \deg h\}.$$

Vis at

$$[\overline{K}(x) : \overline{K}(f)] = \max\{\deg g, \deg h\}.$$

3. Uke 1.3-7.3

(1) La C være en ikkesingulære kurve. Vis at $\mathrm{Div}(C) \cong \mathrm{Div}^0(C) \times \mathbb{Z}$ og $\mathrm{Pic}(C) \cong \mathrm{Pic}^0(C) \times \mathbb{Z}$.

Referanser

[EO] Geir Ellingsrud and John Christian Ottem. *MAT4210 - Algebraic Geometry*.

[Sil09] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*. Number 106 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, NY, 2nd ed edition, 2009.