Notes 13: Clifford-algebraer.

☢ ☢ Versjon -10^{33} ☢ ☢

Versjon -10^{33} — fortsatt ufullstendig og med trykkfeil etc etc, men endel bedre enn versjon $-\infty$. Har også utvidet betraktelig, så på slutten synker nok kvaliteten mot versjon $-\infty$-standard.

Det er par ting som henger og som jeg håper å få oppklart etterhvert.

Allikevel håper jeg dette kan være til nytte, det er i hvertfall et supplement til hva jeg sier på forelesningene.

Introduksjon

Definisjon og elementære egenskaper

I hele denne noten betegner V et vektorrom over kroppen $\mathbb{K}$ og som vanlig i kurset er $\mathbb{K}$ enten de relle tallene $\mathbb{R}$ eller de komplekse $\mathbb{C}$. Mye av det vi skal gjøre fungerer utmerket over generelle kropper (iallefall over kropper av karakteristikk forskjellig fra to), men vi skal alliekvel negrenese oss til $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vi skal anta at vektorrommet V er av endelig dimesjon over $\mathbb{K}$, og n betegner dimensjonen.

Kvadratiske former

Hovedpersonene i denne historien er en *kvadratiske form* på vektorrommet V, og det er på sin plass kort å minne om hva en kvadratisk form er og hvilke de viktigst elementære egenskapen til slike former er. En kvadratisk form er en *bilineær* funksjon $q(v, w)$ definert på $V \times V$ som tar verdier i $\mathbb{K}$. At funksjonen er bilineær betyr naturlig nok at den er lineær i hver av variablene. Formen skal også være *symmetrisk*. Det vil si at $q(v, w) = q(w, v)$ for alle vektorer v og w fra V, og vi skal, om ikke annet nevnes uttrykkelig, ha som en stående antagelse at q er *ikke-degeneret* eller *regulær* som det også kalles. Altså skal det gjelde at dersom v er en slik vektor at $q(v, w) = 0$ for alle $w \in V$, så er $v = 0$. Dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ omtaler vi formen som *reell*, og den er da selvsagt *kompleks* om $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

For å forenkle notasjonen noe skal vi—med et mildt språkmisbruk—betegne størrelsen $q(v, v)$ med $q(v)$. Formen q sier vi er *positiv definitt* dersom $q(v) > 0$ for alle $v \neq 0$, og vi kaller den *negativ definitt* dersom $q(v) < 0$ for alle v.

Kjenner vi $q(v)$ for alle $v \in V$, så er formen i sin helhet bestemt. Dette følger av den såkalte *polariseringslikheten* som i bunn og grunn ikke er annet enn første kvadratsetning:

$$q(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w, v+w) - q(v) - q(w)).$$

STANDARDFORMENE Vi har en rekke reelle standardformer som betegnes med $q_{r,s}$. Det er en for hvert par av ikke-negative hele tall (r,s). Hvis n betegner dimensjonen til V gjelder det at $r+s=n$. Standardformene er alle kvadratiske former på $\mathbb{R}^n$, og de er definert ved uttrykket

$$q_{r,s}(x,y) = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i y_i,$$

der $x = (x_1, \ldots, x_n)$ og $y = (y_1, \ldots, y_n)$ er to vektorer fra $\mathbb{R}^n$. Vi skal la $e_1, \ldots, e_n$ betegne standardbasisen i $\mathbb{R}^n$. Denne er en *ortonormal* basis når $\mathbb{R}^n$ er utstyrt med formen $q_{r,s}$; i denne sammenhengen skal *ortonormal* bety at basisvektorene står *vinkelrett* på hverandre, altså at $q(e_i, e_j) = 0$ om $i \neq j$, og at de er *normert* så langt det lar seg gjøre: Vi har $q(e_i) = 1$ for $1 \leq j \leq r$ og $q(e_i) = -1$ om $r+1 \leq i \leq n$.

INDEKS OG RANG Enhver reell form q på et vektorrommet V er ekvivalent med en av disse standardformene. Dette betyr ikke annet enn at vi kan finne en ortonormal basis for V; for eksempel ved Gram-Schmidts ortogonaliserings prosess. Man kan også vise at om parene (r,s) og (r',s') er forskjellige, så er de to formene $q_{r,s}$ og $q_{r',s'}$ *inekvivalente*, et resultat som av enkelte omtales som "Sylvester's law of inertia". Differensen $r-s$ kalles *indeksen* til den reelle kvadratiske formen q, og $\dim V$ omtales ofte som *rangen* til q. Indeksen og rangen karakteriserer reelle former opp til ekvivalens.

KOMPLEKSE FORMER Dersom grunnkroppen er kroppen av de komplekse tallene, kan en ortogonal basis for V—i vår vide forstand— alltid normaliseres videre, slik at $q(e_i) = 1$ for alle i. Derfor er alle komplekse regulære former ekvivalente til en av standardformene q_n på $\mathbb{C}^n$ som er gitt ved

$$q_n(z, z') = \sum_{i=1}^{n} z_i z'_i,$$

og rangen er den eneste invarianten.

Clifford-avbildninger

Man kan utvikle teorien for Clifford-algebraer på forskjellige måter. Det kan gjøres nærmest elementvis ved å bruke standardformene og standardbasiser for $\mathbb{R}^n$. En slik tilnærming gir selvsagt god innsikt, og vi skal gjøre et slikt innhugg senere, men en konseptuell og funktoriell tilnærming har flere uovertrufne fordeler. Svært mange av dagens anvendelser[1] av Clifford algebraer er i geometriske kontekster der vektorbunter

[1]Det finnes legio eksempler, men fysikkens *gaugeteori* kan være en god representant. I matematikk manifesterer denne seg blant annet som *spin-strukturer* og *spin-$\mathbb{C}$-strukturer* på mangfoldigheter

spiller en stor rolle, og funktorielle konstruksjoner generaliseres nærmest umiddelbart til vektorbunter.

La A være en vilkårlig assosiativ $\mathbb{K}$-algebra med enhetselement 1. En avbildning $\psi\colon V \to A$ kalles en *Clifford-avbildning* dersom følgende likhet i algebraen A gjelder for alle $v \in V$:

$$\psi(v) \cdot \psi(v) = q(v) \cdot 1. \tag{❋}$$

Hvis nå v og w er to vektorer fra V, kan vi sette $v + w$ inn i ❋. Det gir oss likheten

$$\psi(v)\psi(w) + \psi(w)\psi(v) = 2q(v, w) \cdot 1 \tag{❂}$$

som følger ved å sette sammen de to likhetene

$$\begin{aligned}(\psi(v) + \psi(w))^2 &= \psi(v)^2 + \psi(v)\psi(w) + \psi(w)\psi(v) + \psi(w)^2 \\ q(v + w, v + w) &= q(v, v) + 2q(v, w) + q(w, w).\end{aligned}$$

En direkte konsekvens av likheten ❂ er at om v og w er ortogonale, så vil $\psi(v)$ og $\psi(w)$ anti-kommutere.

Universelle Clifford-avbildninger En *universell* Clifford-avbildning er en Clifford-avbildning $\iota\colon V \to C(q)$ slik at enhver annen Cliford-avbildning faktorisere som en algebra homomorfi gjennom ι, og det på en entydig måte. Det skal altså finnes en *entydig algebra homomorfi* $\eta\colon C(q) \to A$ slik at $\psi = \eta\iota$. Uttrykt noe annerledes, man skal alltid kunne komplettere følgende kommutative diagram med en algebrahomomorfi

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"'] & C(q) \arrow[d, dashed, "\eta"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Vi skal ganske snart se at en hver kvadratisk from har en universell Clifford-avbildning, men før vi kommer dit, påpeker vi at en universell Clifford-avbildning er entydig bestemt opp til en entydig isomorfi, slik det pleier å være for strukturer definert ved universelle egenskaper. Argumentet går som følger: Anta at det er to universelle avbildninger $\iota\colon V \to C(q)$ og $\iota'\colon V \to C'(q)$. Ved å bruke at ι er universell, finner vi en homomorfi $\eta\colon C(q) \to C'(q)$, og ved å buke at ι' er universell, finner vi en den andre veien $\eta'\colon C'(q) \to C(q)$. Entydigheten gir oss at $\eta\eta' = \mathrm{id}_{C'(q)}$ og $\eta'\eta = \mathrm{id}_{C(q)}$.

Om $\iota\colon V \to C(q)$ er den universelle Clifford-avbildningen tilhørende q skal vi kort kalle $C(q)$ for *Clifford-algebraen* til q.

Clifford-algebraen

Konstruksjonen av den universelle Clifford-avbildningen følger en standard fremgangsmåte som benytter seg av tensoralgebraen $T(V)$ til V. Tensoralgebraen er hva vi kaller en *fri, assosiativ algebra*. De eneste relasjonene som finnes mellom elementene der, er de som kan avledes av den assosiative loven. I Clifford-algebraen skal vi ha relasjoner av typen $v \otimes v - q(v) \cdot 1 = 0$, som i formelen ✻ på side 3, og de innfører vi ved å dividerer tensoralgebraen med et passende ideal, nemlig det tosidige idealet I generert av alle elementer i $T(V)$ som er på formen $v \otimes v - q(v) \cdot 1$. Vi lar så *Clifford-algebraen* $C(q)$ til den kvadratiske formen q være kvotienten $C(q) = T(V)/I$. Dette er selvsagt en $\mathbb{K}$-algebra, og—som vanlig er for produkter—skal vi skrive produktet i $C(q)$ ved *jukstaposisjon i.e.,* som ab eller $a \cdot b$ for elementer $a, b \in C(q)$.

DEN UNIVERSELLE AVBILDNINGEN Det hører med å konstruere den universelle Clifford-avbildningen $\iota\colon V \to C(q)$, men den konstruksjonen gir seg nesten selv:

Vi har en kvotientavbildning $\pi\colon T(V) \to C(q)$ som vi kan sette sammen med den kanoniske avbildningen $j\colon V \to T(V)$. Det gir oss $\iota = j \circ \pi\colon V \to C(q)$. I diagrams form ser dette slik ut:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\iota"'] & T(V) \arrow[d, "\pi"] \\ & C(q) = T(V)/I \end{tikzcd}$$

Poenget med det vi har gjort så langt, er selvsagt følgende setning:

Setning 1 *Avbildningen $\iota = \pi \circ j\colon V \to C(q)$ er den universelle Clifford-avbildning.*

BEVIS: For det første, siden $v \otimes v - q(v) \cdot 1 \in I$, gjelder likheten

$$\iota(v)\iota(v) = \pi(j(v))\pi(j(v)) = \pi(j(v)j(v)) = \pi(v \otimes 1 \cdot 1 \otimes v) = \pi(v \otimes v) = q(v) \cdot 1.$$

Det viser at ι er en Clifford-avbildning.

At avbildningen ι er universell, er en egenskap som nedarves fra tensoralgebraens universelle egenskap. Dersom $\psi\colon V \to A$ er en Clifford-avbildning inn i en assosiativ algebra A, har ψ en entydig utvidelse til en algebrahomomorfi $\tilde{\psi}\colon T(V) \to A$, noe som følger av tensoralgebraen universelle egenskap. Vi har derfor diagrammet

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\psi"'] & T(V) \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Avbildningen $\tilde{\psi}$ forsvinner på idealet I siden

$$\tilde{\psi}(j(v)^2) = \tilde{\psi}(j(v))^2 = \psi(v)^2 = q(v) \cdot 1,$$

der vi i den siste likheten bruker at ψ er en Clifford-avbildning. Det følger at $\tilde{\psi}$ faktoriserer gjennom $C(q) = T(V)/I$, *i.e.*, det finnes η slik at $\eta\pi = \tilde{\psi}$. Da er $\eta\iota = \eta\pi j = \psi$, som i diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[drr, "\iota"] & T(V) \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & A & C(q) \arrow[l, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

Fordi $\tilde{\psi}$ er en entydig utvidelse av ψ til tensoralgebraen, er η en entydig utvidelse av ψ til $C(q)$. ❑

For å forenkle notasjonen vil vi fra nå av—med et par unntak—slutte å bruke betegnelsen $\iota(v)$ og bare skrive v. Vi identifiserer altså V med dets bilde $\iota(V)$ i $C(q)$. Om ikke lenge skal vi se at avbildningen ι er injektiv, noe som rettferdiggjør denne identifikasjonen.

Cliffordalgebraen $C(q)$ er en superalgebra

Vi kan bruke den universelle egenskapen til å lage selvavbildninger av $C(q)$. For eksempel kan vi la $\psi(v) = -\iota(v)$. Da er selvsagt $\psi(v)^2 = (-\iota(v))^2 = \iota(v)^2 = q(v)\cdot 1$, og det følger at $-\iota$ er en Clifford-avbildning. Denne kan, siden Clifford-algebraen er universell, utvides til en algebrahomomorfi $\alpha\colon C(q) \to C(q)$. Selvavbildningen α er en involusjon, *i.e.*, $\alpha^2 = \mathrm{id}$. Det følger av at $\alpha^2(v) = (-\iota(v))^2 = v$ for alle vektorer $v \in V$, og siden α^2 utvider identiteten og utvidelsene til $C(q)$ er entydige, er $\alpha^2 = \mathrm{id}$. Vi formulerer dette som et lemma:

Lemma 1 *Det finnes en entydig bestemt involutiv algebrahomomorfi $\alpha\colon C(q) \to C(q)$ slik at $\alpha(v) = -v$ for alle vektorer $v \in V$.*

JEVNE OG ODDE ELEMENTER Involusjonen α har to egenrom tilsvarende egenverdiene 1 og -1, og disse betegner vi med henholdsvis $C^0(q)$ og $C^1(q)$. Ofte kalles $C^0(q)$ for den *jevne* delen av $C(q)$ og $C^1(q)$ for den *odde*. Clifford-algebraen dekomponerer i en direkte sum

$$C(q) = C^0(q) \oplus C^1(q).$$

Avbildningen α var konstruert som en utvidelse av avbildningen $v \mapsto -v$, så det er klart at $V \subseteq C^1(q)$. Like klart er det at skalarene $\mathbb{K} \subseteq C^0(q)$. At α er en algebrahomomorfi gir at

$$\alpha(aa') = \alpha(a)\alpha(a') = (-1)^{i+j}aa' \tag{❁}$$

dersom $a \in C^i(q)$ og $a' \in C^j(q)$. Og derfor er $C^i(q)C^j(q) \subseteq C^{i+j}(q)$, hvor vi naturligvis må tolke $i+j$ modulo to. Elementene $a \in C^i(q)$ kaller vi for *homogene elementer* og vi kaller $p(a) = i \in \mathbb{Z}_2$, for *pariteten* til a.

Vi ser således at $C(q)$ er en $\mathbb{Z}_2$-gradert[2] algebra.

En suksessiv anvendelse av ❁ gir følgende likhet som det kan være verdt å merke seg:

$$\alpha(v_1 \cdot \cdots \cdot v_r) = (-1)^r v_1 \cdot \cdots \cdot v_r,$$

der $v_1, \ldots, v_r \in V$, slik at $p(v_1 \cdot \cdots \cdot v_r) \equiv r \mod 2$. Til sener bruk, har vi følgende lemma:

Lemma 2 *Anta at x og $v_1, \ldots, v_r$ er elementer fra V. Anta videre at x er ortogonal til hver av v_i-ene og la $v = v_1 \cdot \cdots \cdot v_r$. Da gjelder det at*

$$vx = (-1)^{p(v)} xv.$$

BEVIS: Siden x er ortogonal til hver v_i, antikommuterer x med hver v_i, og x må bytte plass med hver v_i for å komme foran i produktet. ❑

De enkleste eksemplene — dimensjon én

La oss se på de to aller enkleste reelle kvadratiske formene. Det er de som har et underliggende vektorrom V av dimensjon én. Velg et basiselement e i V, og normaliser det slik at $q(e) = 1$ om formen er positiv definitt, og $q(e) = -1$ om den er negativ definitt. Formen q er i hvert av disse to tilfellene ekvivalent med henholdsvis standardformen $q_{1,0}$ eller $q_{0,1}$.

Tensoralgebraen til V er isomorf med polynomringen $\mathbb{R}[e]$ (hver av tensorpotensene $V^{\otimes n}$ er endimensjonale med $e \otimes e \otimes e \otimes \ldots \otimes e$ som basis, og det produktet svarer til e^n). Idealet I der Clifford-relasjonene ligger innkodet, reduserer seg til hovedidealet $e^2 - 1$ dersom $q(e) = 1$, og $e^2 + 1$ om $q(e) = -1$.

Dette gir oss algebrastrukturen til de to Clifford-algebraene:

$$\begin{aligned} C(q_{0,1}) =& \mathbb{R}[e]/(e^2+1) \simeq \mathbb{C} \\ C(q_{1,0}) =& \mathbb{R}[e]/(e^2-1) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

I tilfellet $q_{0,1}$ identifiserer ι vektorrommet V med den *imaginære aksen* i $\mathbb{C}$ (ι sender

[2]Også kalt en *paritetsalgebra* eller i fysikerkretser en *superalgebra*. Slike superobjekter brukes svært mye i teorien om supersymmetri. Den jevne delen tilsvarer *bosoner*, og de jevne homogene elementene omtales som *bosoniske*, mens den odde delen tilsvarer *fermioner*, og odde homogene elementer er *fermioniske*.

e på i). Den jevne delen av $C(q_{0,1})$ utgjøres av den reelle aksen, og den odde delen av den imaginære aksen. Selvavbildningen α er identisk med komplekskonjugasjonen.

I tilfellet $q_{1,0}$ identifiserer ι vektorrommet V med underrommet $\{\,(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\,\}$ (den sender e til $(1,-1)$), og dette er den odde delen. Den jevne delen reduserer seg til skalarene, eller diagonalen om man vil, *i.e.*, $\{\,(t,t) \mid t \in R\,\}$. Selvavbildningen α er avbildningen $(u,t) \to (t,u)$.

En nyttig isomorfi

Vi minner om definisjonen av tensorproduktet av to $\mathbb{Z}_2$-graderte algebraer A og B. Som lineært rom er det det vanlige tensorproduktet $A \otimes_{\mathbb{K}} B$, men multiplikasjonen er definert annerledes. For dekomponerbare tensorer gjelder formelen

$$(a' \otimes b)(a \otimes b') = (-1)^{p(a)p(b)} a'a \otimes bb', \tag{❁}$$

der $p(x)$ betegner pariteten til x, som altså enten er 0 eller 1. For generelle tensorer, utvides ❁ ved linearitet. For å skille denne algebrastrukturen fra den ordinære— der $(a' \otimes b)(a \otimes b') = a'a \otimes bb'$—betegner vi det $\mathbb{Z}_2$-graderte tensorproduktet med $A \hat{\otimes} B$.

DEN ORTOGONALE SUMMEN AV KVADRATISKE FORMER La nå q_1 og q_2 være to kvadratiske former henholdsvis på vektorrommene V_1 og V_2. Den *ortogonale summen* $q = q_1 \oplus q_2$ er en kvadratisk form på den direkte summen $V_1 \oplus V_2$. Vi identifiserer V_1 med $V_1 \times \{0\}$ og betegner vektorene $(v,0)$ med v, tilsvarende gjør vi med V_2. Den kvadratiske formen q er gitt ved

$$q(v_1 + v_2, v_1' + v_2') = q(v_1, v_1') + q(v_2, v_2'),$$

der $v_1, v_1' \in V_1$ og $v_2, v_2' \in V_2$. Dette betyr at V_1 og V_2 er ortogonale, og at q er lik q_1 på V_1 og q_2 på V_2. Disse egenkapene karakteriserer den ortogonale summen q.

STRUKTURSETNINGEN FOR CLIFFORD-ALGEBRAER Vi skal vise en svært nyttig setning som som på mange måter klarlegger iallfall en god del av strukturen til Clifford-algebraene. Den gir sammenhengen mellom Clifford-algebraen til en ortogonal sum $q = q_1 \oplus q_2$ og til Clifford-algebraene addendene:

Setning 2 *Vi har en naturlig isomorfi $C(q) \simeq C(q_1)\hat{\otimes}C(q_2)$ der q betegner den ortogonale summen av de to kvadratiske formen q_1 og q_2.*

BEVIS: Til å begynne med definerer vi en Clifford-avbildning $j\colon V_1 \oplus V_2 \to C(q_1)\hat{\otimes}C(q_2)$ ved å sende $v_1 + v_2$ til $v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2$. At dette virkelig oppfyller kravet ❋ på side 3 til en Clifford-avbildning ser vi gjennom følgende utregning:

$$\begin{aligned}(v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2)^2 &= \\ &= v_1 \otimes 1 \cdot v_1 \otimes 1 + v_1 \otimes 1 \cdot 1 \otimes v_2 + 1 \otimes v_2 \cdot v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2 \cdot 1 \otimes v_2 = \\ &= v_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes v_2^2 = q(v_1) \cdot 1 \otimes 1 + q(v_2) \cdot 1 \otimes 1 = q(v_1 + v_2) \cdot 1\end{aligned}$$

der vi har brukt konvensjonen i ❁ på forrige side. Den gir nemlig at

$$\begin{aligned} v_1 \otimes 1 \cdot 1 \otimes v_2 &= (-1)^{p(1)p(1)} \cdot v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 \\ 1 \otimes v_2 \cdot v_1 \otimes 1 &= (-1)^{p(v_1)p(v_2)} v_1 \otimes v_2 = -v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

slik at de to kryssleddene kansellerer; vi har jo at $p(1) = 0$ og $p(v_1) = p(v_2) = 1$.

Den universelle egenskapen til Clifford-algebraen $C(q)$, gir oss en utvidelse av j til $C(q)$, $\phi\colon C(q) \to C(q_1)\widehat{\otimes}C(q_2)$.

For å konstruere en avbildning den andre veien, tar vi utgangspunkt i de universelle avbildningen $\iota_k\colon V_k \to C(q_k)$. Siden restriksjonen av j til V_k er en Clifford-avbidning inn i $C(q)$, kan j utvides til algebrahomomorfier $\eta_i\colon C(q_i) \to C(q)$, *i.e.*, vi har $\eta_k \iota_k = j|_{V_k}$, som i diagrams form manifesterer seg som

$$\begin{tikzcd} V_k \arrow[r, "\iota_k"] \arrow[dr, "j|_{V_k}"'] & C(q_k) \arrow[d, dashed, "\eta_k"] \\ & C(q) \end{tikzcd}$$

Produktet av de to avbildningene η_1 og η_2 definerer en bilinear avbildning $C(q_1)\times C(q_2)$ inn i $C(q)$ gitt ved at (v_1, v_2) sendes til $\eta(v_1)\eta_2(v_2)$. En slik bilineær avbildning induserer per definisjon av tensorproduktet en lineær avbildning $\eta\colon C(q_1) \otimes C(q_2) \to C(q)$. Vi skal se at η faktisk er en algebrahomomorfi om vi bruker produktet defineret i ❁. Siden

$$(v_1' \otimes v_2)(v_1 \otimes v_2') = (-1)^{p(v_1)p(v_2)}(v_1'v_1 \otimes v_2v_2')$$

betyr det at vi må verifisere

$$\eta_1(v_1')\eta_2(v_2)\eta_1(v_1)\eta_2(v_2') = (-1)^{p(v_1)p(v_2)}\eta_1(v_1')\eta_1(v_1)\eta_2(v_2)\eta_2(v_2')$$

men siden V_1 og V_2 er ortogonale i $C(q)$, følger det lett fra lemma 2 på side 6 at $\eta_2(v_2)\eta_1(v_1) = (-1)^{p(v_1)p(v_2)}\eta_1(v_1)\eta_2(v_2)$.

Vi har definert algebrahomomorfier begge veier mellom $C(q)$ og $C(q_1)\widehat{\otimes}C(q_2)$, og det er en grei oppgave å sjekke at de to sammensetningene begge er lik identitetsavbildningen. ❑

Et umiddelbart korollar av setning er som følger. Enhver kvadratisk form har som vi så innledningsvis, en ortonormal basis. Vi velger en slik $e_1, \ldots, e_n$, som vi organisere slik at $q(e_i) = 1$ for $1 \leq i \leq r$ og $q(e_i) = -1$ for $r < i \leq n$.

Dette innebærer at den kan skrives som en ortogonal sum $q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_n$ der hver q_i enten er lik $q_{1,0}$ eller $q_{0,1}$. Vi har da

$$C(q) \simeq C(q_1)\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes}C(q_n). \qquad (❆)$$

Vi så ovenfor at

$$\begin{aligned} C(q_{0,1}) =& \mathbb{K}[e]/(e^2+1) \simeq \mathbb{C} \\ C(q_{1,0}) =& \mathbb{K}[e]/(e^2-1) \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Begge er av dimensjon 2, så den første konklusjonen vi kan trekke er

Setning 3 *Dersom q er en kvadratisk form av rang n, så er* $\dim C(q) = 2^n$.

BEVIS: Dimensjonen til et tensorprodukt er lik produktet av dimensjonene til de involverte vektorrommene. ❑

EN LINEÆR BASIS FOR $C(q)$ Vi fastholder en ortonormal (i den utvidete forstand) basis $e_1, \ldots, e_n$ for V som ovenfor, og vi skal se at en næremere angitt rekke av produkter disse basiselementene imellom danner en vektorromsbasis for $C(q)$. Disse produktene er indeksert av alle undermengder av mengden $[1, n]$ av alle naturlige tall mellom 1 og n. Om $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ er en slik undermengde, vil vi anta at $i_1 < \cdots < i_n$, og med en slik indeksering lar vi $e_I \in C(q)$ betegne produktet

$$e_I = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_n}.$$

Om $I = \emptyset$, lar vi e_I betegne enhetselementet 1. Siden $[1, n]$ har 2^n undermengder, får vi på denne måten 2^n elementer i $C(q)$. Vi skal vise

Setning 4 *Elementene e_I danner en lineær basis for $C(q)$ når I gjennomløper alle undermengder av $[1, n]$.*

BEVIS: Vi vet at e_i-ene antikommuterer og at kvadratene deres alle enten er lik 1 eller -1. Derfor kan ethvert monom i dem reduseres til et med maksimalt en forekomst av hver e_i, og et slikt monom er opptil fortegnet lik et av elementene e_I.

Vi vet også at $C(q_1)\widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} C(q_n)$ er generert som algebra av elementene $1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes e_i \otimes \ldots \otimes 1$, der e_i befinner seg på plass nummer i, og da følger det fra fremstillingen av $C(q)$ som et slikt tensorpodukt—som i ligning ❉ ovenfor—at e_i-ene er algebrageneratorer for $C(q)$. Monomene e_I er derfor lineære generatorer, og siden antallet av dem er lik dimensjonen til $C(q)$ etter setning 3, er setningen bevist. ❑

Vi innfrir nå et tidligere løfte:

Setning 5 *Den universelle Clifford-avbildningen $V \to C(q)$ er injektiv.*

BEVIS: Vi så at basisen $e_1, \ldots, e_n$ for V er en del av en basis for $C(q)$. ❑

NOEN NYTTIGE RELASJONER BASISELEMENTENE IMELLOM Det finnes en rekke relasjoner mellom basiselementene e_I som vi skal trenge. Her kommer noen

Lemma 3 *Let $I \subseteq [1, n]$ være en undermengde med s elementer. Da gjelder*

$$e_I e_i = \begin{cases} (-1)^s e_i e_I & \textit{om } i \notin I \\ (-1)^{s-1} e_i e_I & \textit{om } i \in I. \end{cases}$$

BEVIS: For å forfremme e_i til å være den første faktoren i produktet $e_I e_i$ må vi suksessivt bytte om e_i med de s andre faktorene. Dersom $i \notin I$ antikommuterer e_i med alle disse, mens den kommuterer med ett (seg selv!) og antikommuterer med de andre $s-1$ dersom $i \in I$. ❑

Formulert som formeler vedrørende konjugasjon blir dette seende slik ut

Lemma 4 *Let $I \subseteq [1, n]$ være en undermengde med s elementer. Da gjelder*

$$e_i^{-1} e_I e_i = \begin{cases} (-1)^s e_I & \textit{om } i \notin I \\ (-1)^{s-1} e_I & \textit{om } i \in I. \end{cases}$$

Vi minner om at $I \bigtriangleup J$ betegner den symmetriske differensen mellom de to mengdene I og J. Den består av de elementene som ligger i én av dem, men ikke i begge:

Lemma 5 *Følgende formel gjelder fortegn*

$$e_I e_J = \pm e_{I \bigtriangleup J}.$$

BEVIS: De eneste faktorene e_k i $e_I e_J$ som forekommer én og bare én gang, er de med $k \in I \bigtriangleup J$. Kvadrater er enten lik 1 eller -1, og permutasjoner av faktorer forandrer bare fortegnet til produktet. ❑

Volumelementet og senteret til $C(q)$

Elementet $\omega = e_1 e_2 \cdot \cdots \cdot e_n$ — som altså er lik e_I for $I = [1, n]$ — spiller en særskilt rolle. Dets egenskaper er avgjørende for hvordan representasjonsteorien for $C(q)$ ser ut.

For det første, det er et "alternerende element" i den forstand at om $\sigma \in S_n$ er en permutasjon, så er

$$e_{i_{\sigma 1}} e_{i_{\sigma 2}} \dots e_{i_{\sigma n}} = \operatorname{sign}(\sigma)\, e_I, \qquad (✿)$$

en likhet man innser om man husker at den symmetriske gruppen S_n er generert av nabotransposisjoner, og for slike er ✿ ekvivalent med at to naboelementene e_i og e_{i+1} antikommuterer. Det følger at om $a \in \mathrm{Gl}(V)$, er en vilkårlig lineær avbildning, så er

$$a(e_1)a(e_2)\dots a(e_n) = \det a \cdot e_I.$$

Spesielt, om a er ortogonal, slik at $e_i' = ae_i$ er en ny ortogonal basis for V, følger det at:

$$\omega' = \pm\omega$$

med $\omega' = \omega$ om a bevarer orienteringen av V og $\omega' = -\omega$ om ikke. Elementet ω er altså opptil fortegn uavhengig av hvilken ortogonale basis vi tar utgangspunkt i. Dette gir en kanonisk innleiring $\Lambda^n V \to C(q)$. På grunn av disse egenskapene kalles ofte ω for *volumelementet*. Det tilfredstiller

Setning 6 *Anta at den kvadratiske formen q er ekvivalent med standardformen $q_{r,s}$ med $n = r + s$. Da gjelder det at*

$$\begin{aligned} v\omega &= (-1)^{n-1}\omega v \quad \textit{for alle } v \in V\ , \\ \omega^2 &= (-1)^{n(n-1)/2+s}. \end{aligned}$$

Før vi begynner beviset for denne setningen, la oss bemerke at den noe uhåndterlige eksponenten i den andre ligningen kan forenkles. Innfører vi *indeksen* $\nu = r - s$ til formen q gjelder følgende kongruens, som man etablerer ved noe regning og bruk av at $n = r + s$:

$$n(n-1)/2 + s \equiv \nu(\nu-1)/2 \bmod 2.$$

Nå er det slik at $\nu(\nu-1)/2 \equiv 0 \bmod 2$ om $\nu \equiv 0$ eller $\nu \equiv 1 \bmod 4$, mens $\nu(\nu-1)/2 \equiv 1 \bmod 2$ i de to resterende tilfellene, $\nu \equiv 2$ eller $\nu \equiv 3 \bmod 4$. Det gir:

Setning 7 *Kvadratet ω^2 avhenger av kongruensklassen til indeksen $r - s$ mod 4 på følgende måte:*

$$\omega^2 = \begin{cases} 1 & \textit{om } \nu \equiv 0,1 \textit{ mod } 4 \\ -1 & \textit{om } \nu \equiv 2,3 \textit{ mod } 4 \end{cases}$$

BEVIS FOR SETNING 6: Det er nok å sjekke den første likheten om v er et av basiselementene e_k, men for å omgjøre $e_k\omega$ til ωe_k må vi suksessivet bytte om e_k med hvert av elementene e_i, og e_k antikommuterer med $n-1$ av dem og kommuterer med ett (seg selv!).

Den andre likheten følger nå lett. Vi bruker induksjon på n og lar $\omega' = e_1e_2\dots e_{n-1}$. Følgende gjelder:

$$\omega^2 = \omega' e_n \omega' e_n = (-1)^{n-1}(w')^2 e_n^2 = (-1)^{(n-1)(n-2)/2+n-1+s'} e_n^2 = (-1)^{n(n-1)/2+s}$$

der naturligvis s' er antall e_i-er med $1 \leq i \leq n-1$ som har kvadrat -1. Således er $s = s'$ om $e_n^2 = 1$ mens $s = s'+1$ dersom $e_n^2 = -1$, og setningen følger. ❑

Vi minner om at dersom A er en algebra og $B \subseteq A$ en underalgebra, så er sentalisatoren til B i A mengden av de elementene i A som kommuterer med alle elementer i B. Sentralisatoren betegnes med $C_A(B)$, det vil si at vi har

$$C_A(B) = \{\, a \in A \mid ab = ba \text{ for alle } b \in B \,\}$$

Lemma 6 *Sentralisatoren $C_{C(q)}(C^0(q))$ er lik $\mathbb{K}\omega + \mathbb{K}$. Senteret $Z(C(q))$ er utspent av ω og 1 dersom n er odde, i.e., $Z(C(q)) = \mathbb{K}\omega + \mathbb{K}$. Om n er jevn, er $Z(C(q))$ redusert til $\mathbb{K}$.*

BEVIS: At ω ligger i $Z(C(q))$ når n er odde, men ikke når n er jevn, følger rett fra setning 6. Anta at $a = \sum_{I \subseteq [1,n]} u_I e_I$ er et sentralt element. Konjugasjon med en e_i gir etter lemma 3 på side 10:

$$\sum_{i \notin I} (-1)^{s(I)} u_I e_I + \sum_{i \in I} (-1)^{s(I)-1} u_I e_I = \sum_I u_I e_I, \tag{❄}$$

der $s(I)$ står for antall elementer i I. Om I er en mengde hverken lik $\emptyset$ eller $[1,n]$, kan vi bruke en e_i med $i \in I$ om $s(I)$ er odde eller $i \notin I$ om $s(I)$ er jevn. I begge tilfeller får vi fra ❄ at $(-1)u_I = u_I$ og altså $u_I = 0$.

Den jevne delen $C^0(q)$ er generert av produkter vv' av to elementer fra V. Det følger fra setning 6 at ω sentraliserer slike. Anta at $a = \sum_{I \subseteq [1,n]} u_I e_I$ sentraliserer $C^0(q)$, og la J være en undermengde av $[1,n]$ hverken lik $[1,n]$ eller $\emptyset$. Da kan vi velge en $i \in J$ og en $j \notin J$. Konjugerer vi a med produktet $e_i e_j$ får vi etter ligning ❄

$$(e_i e_j)^{-1} a e_i e_j = \sum_{I \neq J} (\pm u_I) e_I + (-1)^{2S(J)-1} u_J e_J = a = \sum_I u_I e_I.$$

Denne ligningen gir at $-u_J = u_J$, og følgelig forvinner u_I. ❑

FORMER MED INDEKS KONRUENT 1 MOD 4 Som en andendelse av volumelementet skal vise følgende resultat som gir en dekomposisjon av enkelte Clifford-algebraer i en direkte sum av to underalgebraer. Dette er smakebit, vi skal senere gi en fullstendig oversikt over hvilke algebrastrukturer Clifford-algebraene har, og resultatet her, vil da følge lett.

Vi skal studere nøyere den situasjonen der n er odde og $\omega^2 = 1$, som etter setningen ovenfor betyr at $r - s \equiv 1 \bmod 4$. Da er ω en sentral idempotent, og vi lar $p^+ = (1+\omega)/2$ og $p^{-1} = (1-\omega)/2$.

Lemma 7 *Elementene p^+ og p^- er sentrale, ortogonale idempotenter og $p^+ + p^{-1} = 1$.*

BEVIS: Dette er kvadratsetningene: $(p^{\pm})^2 = (1 \pm \omega)^2/4 = (1 \pm 2\omega + 1)/4 = p^{\pm}$ og $p^+p^- = (1+\omega)(1-\omega)/4 = (1-\omega^2)/4 = 0$ ❏

Det følger at vi kan dekomponere $C(q_{r,s}) = p^+C(q_{r,s}) \oplus p^-C(q_{r,s})$. Involusjonen α induserer en isomorfi mellom de to underalgebraens $p^+(Cq_{r,s})$ og $p^-C(q_{r,s})$. Siden n er odde, er $\alpha(\omega) = -\omega$ og da er

$$\alpha(p^+) = \alpha((1+\omega)/2) = (1+\alpha(\omega))/2 = (1-\omega)/2 = p^-$$

noe som gir at $\alpha(p_+C(q_{r,s})) = p^-\alpha(C(q_{r,s})) = p^-C(q_{r,s})$. Vi oppsummerer:

Setning 8 *Dersom $r - s \equiv 1 \mod 4$, så er $p^{\pm} = (1 \pm \omega)/2$ to sentrale, ortogonale idempotenter, og $C(q_{r,s})$ dekomponerer som en sum av to isomorfe underalgebraer:*

$$C(q_{r,s}) = p^+C(q_{r,s}) \oplus p^-C(q_{r,s}).$$

Isomorfien mellom de to underalgebraene er gitt ved involusjonen α.

De to underalgebraene kan vi også identifisere, men det er litt kronglete utsagn.

Setning 9 *For alle r og s er Clifford-algebraene $C_{r+1,s}$ og $C_{r,s+1}$ isomorfe som algebraer. Om $r - s \equiv 1 \mod 4$, så er de to algebraene $p^+C(q_{r,s})$ og $p^+C(q_{r,s})$ isomorfe med $C(q_{r-1,s})$ om $r > 0$ og med $C(q_{r,s-1})$ om $s > 0$.*

BEVIS: La oss se på $p^+C(q_{r,s})$. Denne er klart isomorf med $C(q_{r,s})/(1-\omega)$ der $(1-\omega)$ betegner hovedidealet generet av $1-\omega$. Lar vi $\overline{e}_i$ betegne restklassen til e_i, finner vi

$$\overline{\omega} = \overline{e}_1\overline{e}_2\ldots\overline{e}_n = 1$$

som gir

$$\overline{e}_n = \epsilon\overline{e}_1\overline{e}_2\ldots\overline{e}_{n-1}$$

der ϵ er et fortegn avhengig av hva e_n^2 er. Det følger at $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_{n-1}$ genererer $p^+C(q_{r,s})$. Relasjonene mellom e_i-ene gjelder fortsatt mellom $\overline{e}_i$-ene slik at de antikommuterer og oppfyller $\overline{e}_i^2 = q(e_i)$, og siden $C(q_{r,s})/(1-\omega)$ og $C_{r,s-1}$ har samme dimensjon, må $C(q_{r,s})/(1-\omega) \simeq C_{r,s-1}$. ❏

Vi skal vd en senere anledning dra nytte av følgende observasjon:

Setning 10 *Anta $r - s = \nu \equiv 1 \mod 4$ og at $n \equiv 3 \mod 4$. La $\pi\colon C_{r,s} \to C_{r,s-1}$ være projeksjonen.Da er $\pi(\overline{a}) = \overline{\pi}(a)$. Spesielt er π normbevarende*

BEVIS: Vi beholder notasjonen fra forrige bevis, men vil også bruke nptasjonen $\pi(e) = \overline{e}$. $C_{r,s-1}$ er Clifford-algebraen på rommet med $\pi e_1, \dots, \pi e_{n-1}$ som basis. Siden konjugasjon er en antihomomorfi, er det nok å sjekke påsatnden for $e_1, \dots, e_n$ siden de er algebrageneratorer for $C_{r,s}$.

Det er klart at $\pi e_i^t = (\pi e_i)^t$ dersom $1 \leq i \leq n-1$, likeledes er $\alpha\pi e_i = \pi\alpha e_i$, og følgelig er $\overline{\pi(e_i)} = \pi(\overline{e}_i)$. Så la oss angripe e_n. Vi har, som i beviset ovenfor, likheten

$$\pi(e_n) = q(e_n)\pi(e_1) \cdot \dots \cdot \pi(e_{n-1}).$$

Med referanse til lemma 8 på side 16 gir dette

$$\begin{aligned}\pi(e_n)^t &= q(e_n)(\pi(e_1) \cdot \dots \cdot \pi(e_{n-1}))^t = q(e_n)(-1)^{(n-1)(n-2)/2}\pi(e_1) \cdot \dots \cdot \pi(e_{n-1}) \\ &= (-1)^{(n-1)(n-2)/2}\pi(e_n) = -\pi(e_n)\end{aligned}$$

siden vi antok at $n \equiv 3 \mod 4$. Men nå er $\alpha\pi(e_n) = \pi(e_n)$ siden n er odde, og vi finner $\alpha\pi(e_n)^t = -\pi(e_n) = \pi(\alpha(e_n)^t)$. ❑

En slik dekomposisjon vi nå har sett, er spesifikk for Clifford-algebraene til former med en indeks som er kongruent 1 mod 4. I alle andre tilfeller dekomponener ikke Clifford-algebaren i en sum av to underalgebraer, vi har nemlig setningen nedenfor. Den følger også når vi etterhvert har klassifisert alle Clifford-algebraer, men det er instruktivt å ha et bevis uavhengig av klassifikasjonen.

Setning 11 *$C(q_{r,s})$ er en enkel algebra unntatt om $r - s \equiv 0, 1$ mods 4.*

BEVIS: Anta at $A \subseteq C(q_{r,s})$ et er ekte, ikketrivielt og tosidig ideal. La $a \in A$ være et element forskjellig fra null og som ikke er en enhet. Vi kan alltid skrive $a = \sum_I u_I e_I$, og vi velger a slik at antall indekser I med $u_I \neq 0$ er minimalt. For minst en I må $u_I \neq 0$, og da er $a' = (u_I e)^{-1}a$ på formen $a' = 1 + \sum_I u'_I e_I$. Siden ikke $a' = 1 + \sum_I u'_I e_I$ får nye ledd, og hvert produkt $e_I e_J$ er et basiselement, har fortsatt a' et minimalt antall koeffisenter forskjellig fra null. Vi kan altså anta at $a = a'$.

La nå $J \subseteq [1, n]$ være en undermengde som ikke er tom og som ikke er lik hele $[1, n]$. Vi konjugerer a med $e_i e_j$ der $i \in J$ men $j \notin J$. Det gir oss følgende nye element som ligger i A fordi A er et tosidig ideal:

$$b = (e_i e_j)^{-1} a e_i e_j = 1 + \sum_{I \neq J} (\pm u_I) e_I + (-1)^{2s(J)-1} u_J e_J = 1 + \sum_{I \neq J} (\pm u_I) e_I - u_J e_J. \quad (1)$$

Elementet $a + b$ ligger i A, er forskjellig fra null og har færre ikkeforsvinnende koeffisienter enn a dersom $u_J \neq 0$. Det betyr at $u_J = 0$, og derfor er a på formen

$$a = 1 + u\omega.$$

Om nå n er jevn finner vi $e_1^{-1}ae_1 = 1 - u\omega$, og derfor er $2 = a + e_1^{-1}ae_1 \in A$ som er umulig. Om nå $\omega^2 = -1$, følger det at $a(1-u\omega) = 1+u^2 \in A$, men $1+u^2$ er invertibel så dxet er også umulig. Så konklusjonen er at n er odde og $\omega^2 = 1$, det vil si at ideksen til q er kongruent 1 mod 4. ❑

Transposisjon, konjugasjon og norm

Vi skal i denne paragrafen vider uvikle teorien omkring Cliffordalgebraene og se at de mye mer struktur. Strengt tatt er dem transposisjonsavbildningen vi skal lage i denne paragrafen en *anti-involusjon*. Det er en selvavbildning av $C(q)$ hvis verdi på et element α skal skrives som a^t. Det er en anti-homomorfi i den forstand at $(ab)^t = b^t a^b$, slik vi er vant til med transposisjon av matriser. En noe mer høytflyvende måte å uttrykke at en avbildning $\phi\colon A \to B$ mellom to algebraer er en anti-homomorfi, er å si at ϕ er en homomorfi fra A til B^{op}, der B^{op} er den *omvendte* algebraen til B. Den underliggende lineære strukturen til B^{op} er B, men produktet er snudd rundt: Produktet bb' i den omvendte algebraen, som kan noteres $b \cdot_{B^{\text{op}}} b'$, om man vil være tydelig, er per definisjon elementet $bb' \in B$, og der mener vi produktet bb' utregnet i B, altså $b' \cdot_B b$ om man vil. Det betyr at:

$$b \cdot_{B^{\text{op}}} b' = b' \cdot_B b.$$

Det finnes også en Z_2-*gradert versjon* av den omvendte algebraen, eller en superutgave, om man er mindre beskjeden i språkbruken. Den spiller ingen sentral rolle i hva vi skal gjøre, men det hører med å nevne den. Superomvendingen til en Z_2-gradert algebra A betegner vi[3] med A^{sop}. Både den underliggende lineære sturkturen og graderingen bevares, men produktet er gitt ved

$$a \cdot_{sop} b = (-1)^{p(a)p(b)} ba$$

for homogene elementer a og b, også utvider man det ved linearitet til vilkårlige.

TRANSPOSISJON Anta at $\phi\colon V \to A$ er en Clifford-avbildning. Vi kan betrakte ϕ som en avbildning $\phi\colon V \to A^{\text{op}}$ siden A^{op} har samme underliggende vektorrom som A; det er bare produktet som er annerledes. Men et kvadrad, $a \cdot a$, har selvsagt samme verdi om det regnes ut i A eller i A^{op}. Derfor er $\phi\colon V \to A^{\text{op}}$ også en Cifford-avbildning og kan utvides til en algebrahomomorfi fra $C(q)$ til $C(q)^{op}$, eller altså en anti-homomorfi $C(q) \to C(q)$. Det er den søkte transposisjonen a^t.

For vektorer $v_1, \ldots, v_r$ fra V har vi likheten som redferdiggjør navnet transposisjon:

$$(v_1 v_2 \ldots v_{r-1} v_r)^t = v_r v_{r-1} \ldots v_2 v_1.$$

[3]Dette er en høyst lokal konvensjon, med gyldighet begrenset til dette notatet.

Den følger ved en enkel induksjon og det faktum at $v^t = v$ for vektorer $v \in V$; vi utvidet jo *identiteten* på V for å få a^t!

At $a \mapsto a^t$ er en involusjon, følger av entydigheten i kravet til en universell Clifford-avbildning. En sammensetning av to anti-homomorfier er en homomorfi, så $a \to (a^t)^t$ er en algebrahomomorfi fra $C(q)$ til $C(q)$ som utvider identiteten, derfor er den lik identiteten. På lignende vis sjekker man at α og transposisjon kommuteter:

$$\alpha(a^t) = \alpha(a)^t.$$

Begge er homomorfier $C(q) \to C(q)^{\mathrm{op}}$ som utvider $v \to -v$.

KONJUGASJON OG NORM Vi definer det *konjugerte elementet* $\overline{a}$ til et element a fra $C(q)$ ved $\overline{a} = \alpha(a)^t$. Siden transposisjon er en anti-involusjon og α en involusjon, er konjugasjon også en anti-involusjon. Vi har

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \quad \text{og} \quad \overline{\overline{a}} = a.$$

Produktet $N(a) = a\overline{a}$ kaller vi *normen* til Cliffordelementet a. For vektorer v fra V er $v^t = v$, men $\alpha(v) = -v$, så for slike gjelder

$$\overline{v} = -v \text{ og } Nv = -q(v),$$

og det gjelder også at α og konjugasjon kommuterer:

$$\alpha(\overline{a}) = \overline{\alpha(a)}.$$

Det er verd å merke seg følgende likheter

Lemma 8 *La $I \subseteq [1, n]$ være en undermengde med s elementer. Da gjelder*

$$\begin{aligned} e_I^t &= (-1)^{s(s-1)/2} e_I, \\ \alpha(e_I) &= (-1)^s e_I, \\ \overline{e_I} &= (-1)^{s(s+1)/2} e_I. \end{aligned}$$

BEVIS: Beviset bruker definisjonenene av α og $(-)^t$, og består i å telle opp antall ombyttinger av basiselementene e_i som må gjøres for å bringe faktorene i $\alpha(e_I)$ og $(e_I)^t$ tilbake til en stigende orden. ❑

Sammenhengeen mellom $C(-q)$ og $C(q)^{sop}$ Vi skal vise følgende setning som en anvendelse av den superomvendte algebraen:

Setning 12 *Det finnes en kanonisk isomorfi av paritetsalgebraer* $\sigma_q \colon C(-q) \approx C(q)^{sop}$

Bevis: La $V \to C(q)^{sop}$ være avbildningen $\sigma(v) = v$. Da har vi at

$$\sigma(v)\sigma(v) = v \cdot_{sop} v = (-1)^{p(v)p(v)} v \cdot v = -v^2 = -q(v)$$

slik at σ er en Cliffordavbildning for formen $-q$, og den kan derfor utvides til en algebrahomomorfi $\sigma_q \colon C(-q) \to C(q)^{sop}$. Det er klart at avbildningen[4] σ_{-q}^{sop} er en invers til σ_q, da sammensetningen $\sigma_{-q}^{sop}\sigma_q$ et er algebrahomomorfi $C(-q) \to C(-q)$ som utvider identiteten. ❑

Flere eksempler—rang to

Vi høyner nå rangen på eksemplene våre med en og skal angi Clifford-algebraene til alle de tre formene avrang to $q_{2,0}$, $q_{1,1}$ og $q_{0,2}$. Vi starer med $q_{1,1}$:

Eksempel 1. — Formen $q_{1,1}$. La a_1 og a_2 være de to matrisene

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sjekker lett at $a_1^2 = I_2$ og at $a_2^2 = -I_2$ der I_2 som vanlig betegner identitetsmatrisen. Det er også et enkelt regnestykke å fastslå at $a_1a_2 = -a_2a_1$. Men dette betyr at a_i-ene presis oppfyller Clifford-relasjonen for formen $q_{1,1}$, og vi har vist at

$$C(q_{1,1}) \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}(2).$$

I forbindelse med Clifford-algebraer brukes ofte notasjonen $\mathbb{K}(r)$ for å betegne algebraen av $r \times r$-matriser over kroppen $\mathbb{K}$ (der $\mathbb{K}$ også kan være kvaternione-algebraen $\mathbb{H}$). ❋

Eksempel 2. — formen $q_{0,2}$. I dette tilfellet har vi to generatorer e_1 og e_2 for V som begge oppfyller $e_i^2 = -1$, og de antikommutere. Lar vi $e_3 = e_1e_2$ ser vi at $e_3^2 = -1$ og at e_3 også antikommuterer med de to andre. Vi kjenner igjen algebraen av kvaternioner. Vi har vist at

$$C(q_{0,2}) \approx \mathbb{H}.$$

❋

EKSEMPEL 3. — FORMEN $q_{2,0}$. Vi lar i dette tilfellet a_1 og a_2 betegne matrisene

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sjekker lett at $a_1^2 = a_2^2 = I_2$ og at a_1 og a_2 antikommuteter. De oppfyller altså presis Clifford-relasjonene for formen $q_{0,2}$. Det følger at

$$C(q_{2,0}) \approx \mathbb{R}(2).$$

❋

EKSEMPEL 4. — FORMEN q_2 OVER DE KOMPLEKSE TALLENE.. Matrisene a_1 og a_2 ovenfor i eksempel 2 (eller også de i eksempel 1) fungerer like godt over $\mathbb{C}$, så vi har

$$C(q_2) \approx \mathbb{C}(2).$$

❋

Den jevne delen av Cliffordalgebraen

Det finnes en rekke relasjoner mellom de forskjellige Clifford-algebraene. En av dem er følgende som vi skal trekke veksler på ved en senere anledning.

Setning 13 *Det finnes en algebraisomorfi $h\colon C(q_{r,s}) \simeq C^0(q_{r,s+1})$ slik at $h(\overline{a}) = \overline{h(a)}$, og derfor er h normbevarende.*

BEVIS: Velg en ortonormal basis $e_1, \ldots, e_{r+s+1}$ for $\mathbb{R}^{r+s+1}$ med $q(e_i) = 1$ for $1 \leq i \leq r$ og $q(e_i) = -1$ for $r < i \leq r + s + 1$. Definer en lineær avbildning $\psi\colon \mathbb{R}^{r+s} \to C^0(q_{r,s+1})$ ved å la verdien på basiselementene være $\psi(e_i) = e_{s+1}e_i$. Vi påstår at ψ er en Clifford-avbildning. La nemlig $v = \sum x_i e_i$ være et element fra V. Ved å bruke at $e_{s+1}^2 = -1$ og at e_{s+1} antikommuterer med de andre elementene i basisen, finner vi:

$$\psi(v)^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq r+s} x_i x_j e_{s+1} e_i e_{s+1} e_i = \sum_{1 \leq i,j \leq r+s} x_i x_j e_i e_j = v^2 = q(v).$$

Det betyr at ψ kan utvides til en algebrahomomorfi $\tilde{\psi}\colon C(q_{r,s}) \to C^0(q_{r,s+1})$. Vi undersøker hvordan $\tilde{\psi}$ avbilder basiselementene e_I for undermengder $I \subseteq [1, r+s]$, og finner:

$$\tilde{\psi}(e_I) = \begin{cases} \pm e_I & \text{om } s(I) \text{ er jevn ,} \\ \pm e_I e_{s+1} & \text{om } s(I) \text{ er odde ,} \end{cases}$$

[4]Tilordningen $A \to A^{sop}$ er en funktor fra kategorien av partitesakgebraer til seg selv; med $\phi^{sop} = \phi$ for homormofier som respekterer graderingen.

som viser at $\tilde{\psi}$ er surjektive. Da de to algebraene har samme dimensjon, er $\tilde{\psi}$ en isomorfi.

At h er normbevarende ser vi slik. Anta først at $I \subseteq [1, n]$ har et *odde* antall elementer. Vi finner der ϵ betegner et fortegn at

$$h(\alpha(e_I)^t) = -\epsilon e_I^t e_{r+1} = \epsilon e_{r+1} e_I^t = \alpha(h(e_I)^t)$$

slik at vi ved linearitet kan slutte at $h(\overline{a}) = \overline{h}(a)$ for alle odde elementer i $C_{0,n}$. Videre er $\overline{e}_I = e_I$ dersom I har et *jevn* antall elementer, og det gjelder i $C_{0,n}$ så vel som i $C_{0,n+1}$. Det følger at $h(\overline{a}) = \overline{h}(a)$ for a jevn, og vi er ferdig. ❑

Klassifikasjon av Cliffordalgebraene

I dette avsnittet skal vi gi en fullstendig oversikt over algebrastrukturen til de forskjellige Cliffordalgebraene. Svært mye av dette går helt tilbake til Clifford, og en god del skylder vi Cartan. Denne idekretsen har altså lang historie, men fikk en voldsom renesanse da Bott oppdaget det som senere fikk navnet Bott-periodisitet. Det dreier seg om et dypt topologisk resultat om en periodisk oppførsel av de stabile homotopigruppene til de ortogonale gruppene, og som etterhvert akselerete utvikling av K-teori. De ortogonale gruppene er jo nøye knyttet knyttet til Clifford-algebraer, og vi gjenfinner reminisenser av denne periodisiteten hos disse.

Vi skal anvende oss av følgende nærmest trivielle lemma:

Lemma 9 *Anta at C er en endeligdimensjonal algebra. Anta videre at det er gitt to underalgebraer A og B av C som kommuterer og er slik at $A \cdot B = C$, og anta at $\dim C = \dim A \dim B$. Da har vi en algebra-isomorfi $C \simeq A \otimes B$.*

BEVIS: Avbildningen $\psi \colon A \otimes B \to C$ gitt ved $a \otimes b \mapsto ab$ er en linear isomorfi, og det eneste poenget i beviset er at ψ er en algebrahomomorfi siden $\psi(aa' \otimes bb') = aa'bb' = aba'b' = \psi(a \otimes b)\psi(a' \otimes b')$. ❑

Setning 14

$$C_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} C_{0,2} \simeq C_{0,n+2}$$
$$C_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} C_{2,0} \simeq C_{0,n+2}$$

BEVIS: Vi lar $C =$ betegne enten $C_{0,n+2}$ eller $C_{n+2,0}$ avhengig av hvilket tilfelle vi ser på, og lar $e_1, \ldots, e_{n+2}$ være en ortonormal basis for $C_{0,n+2}$. Da er $e_i^2 = \epsilon$ der ϵ er ± 1 avhenig av hvilket tilfelle vi ser på. Vi lar $g_i = e_i e_{n+1} e_{n+2}$ for $1 \leq i \leq n$. Da antikommuterer g_i-ene, og de tilfredstiller alle $g_i^2 = -\epsilon$. Vi har nemlig:

$$g_i g_j = e_i e_{n+1} e_{n+2} e_j e_{n+1} e_{n+2} = -e_i e_j,$$

for alle i og j mellom 1 og n. Det betyr at $e_1, \dots, e_n$ genererer en underalgebra A av C isomorf med henholdsvis $C_{n,0}$ eller $C_{0,n}$. Videre kommuterer g_i både med e_{n+1} og e_{n+2}:

$$\begin{aligned} g_i e_{n+1} &= e_i e_{n+1} e_{n+2} e_{n+1} = -e_i e_{n+1} e_{n+1} e_{n+2} = e_{n+1} e_i e_{n+1} e_{n+2} = e_{n+1} g_i \\ g_i e_{n+2} &= e_i e_{n+1} e_{n+2} e_{n+2} = -e_i e_{n+2} e_{n+1} e_{n+2} = e_{n+2} e_i e_{n+1} e_{n+2} = e_{n+2} g_i \end{aligned}$$

Lar vi nå B være underalgebraen generert av de to elementene e_{n+1} og e_{n+2}, er $B \simeq C_{0,2}$ henholdsvis $B \simeq C_{2,0}$. Da er $\dim B \dim C = 2^2 2^{n-2} = 2^n = \dim C$, og $A \cdot B = C$ siden generatorene e_i for C tilfredstiller $e_i = g_i \cdot e_{n+1} e_{n+2}$ og følgelig ligger i $A \cdot B$. ❑

Setning 15 $C_{r,s} \otimes C_{1,1} \simeq C_{s+1,r+1}$

BEVIS: Vi bruker samme taktikk som forrige setningen, men velger nå en e_{n+1} med $e_{n+1}^2 = 1$ og en e_{n+2} med $e_{n+2}^2 = -1$. Resten går ord for ord som før med enkelte justeringer av fortegn. ❑

Lemma 10 $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4)$

BEVIS: Vi har en opplagt bilineær avbildning $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ girt ved $(a, b) \mapsto \psi_{a,b}$ der $\psi_{a,b}(x) = ax\bar{b}$, som gir oss algebra-avbildning $\psi \colon \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$. Men tensorproduktet av to sentrale, enkle algebraer er enkel, så $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ har intet ikke-triviellt, ekte tosidig ideal. Derfor er $\mathrm{Ker}\,\psi = 0$, og ψ er en isomorfi da de to algebraene vi ser på, har samme dimensjon. ❑

Setning 16 $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx \mathbb{C}(2)$

BEVIS: De følgende to matrisene genererer kvaternione-algebraen $\mathbb{H}$ som reell algebra:

$$a_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

men betraktet som komplekse matriser generer de $\mathbb{C}(2)$ over $\mathbb{C}$. ❑

Teorem 1 (Cartan-Bott-periodisitet) *Vi har at*

$$\begin{aligned} C_{n+8,0} &\approx C_{n,0} \otimes \mathbb{R}(16) \\ C_{0,n+8} &\approx C_{0,n} \otimes \mathbb{R}(16) \end{aligned}$$

BEVIS: Vi bruker setning 14 fire ganger og finner:

$$C_{n+8,0} \approx \mathbb{C}_{n,0} \otimes C_{0,2} \otimes C_{2,0} \otimes C_{0,2} \otimes C_{2,0}$$

og eksemplene 2 og 3 på side 17 og setning 10 gir oss

$$C_{n+8,0} \approx C_{n,0} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) = C_{n,0} \otimes \mathbb{R}(16)$$

❏

Vi tabulerer nå de åtte første av hver av seriene $C_{0,n}$ og $C_{n,0}$. Tabellen genereres enkelt på følgende måte ved å bruke setning 14 ovenfor. Om algebraen A er plassert to plasser lenger til høyre og en ned i forhold til B, så er $A = B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$, og om A befinner seg to plasser til høyre og en opp, så er $A = B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$. Når vi da kjenner algebraene i de to første kolonnene i tabellen, som vi bestemte på side **??** og 17, er det enkelt å fylle den ut.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_{0,n}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$C_{n,0}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$C(8)$	$\mathbb{R}(16)$

Pin and Spin

En av hovedanvendelsene til Clifford-algebraene $C(q)$ er konstruksjonen av de universelle overdekningsrommene til $\mathrm{O}(n)$ og $\mathrm{SO}(n)$, og for de indefinitte formenes vedkomende, beskrivelsen av de tilsvarende rommene for gruppene $\mathrm{O}(p,q)$ og $\mathrm{SO}(p,q)$), som jo er av særlig interesse i fysikken.

Taktikken i disse konstruksjonen er å identifisere n passende undergrupper av gruppen $C(q)^*$ av invertible elementer i $C(q)$. Disse virker ved selvsagt *konjugasjon* på $C(q)$, men det skal vise seg at det er en lettere modifisert konjugasjonsvirkning som får det hele til å fungere, nemlig følgende, der selvavbildningen α spiller en rolle. Dersom $a \in \Gamma(q)$ lar vi a virke på en $b \in C(q)$ gennom formelen

$$c_a(b) = \alpha(a)ba^{-1}.$$

Siden α er en algebrahomomorfi, er dette en *representasjon*:

$$c_{aa'}(b) = \alpha(aa')b(aa')^{-1} = \alpha(a)\alpha(a')b(a')^{-1}a^{-1} = c_a(c_{a'}(b)),$$

Ey viktig første skritt i konstruksjonen av $\mathrm{Pin}(q)$ og $\mathrm{Spin}(q)$ er følgende gruppe:

$$\Gamma(q) = \{\, a \in \Gamma(q) \mid c_a V \subseteq V \,\}$$

I klartekst består denne gruppen av de invertible Cliffordelementene som oppfyller betingelsen $\alpha(a)va^{-1} \in V$ for alle $v \in V$. Dette betyr at vi har en gruppehomomorfi:

$$c_\star\colon \Gamma \to \mathrm{Gl}(V),$$

gitt ved $c_a(v) = \alpha(a)va^{-1}$.

Gruppen $\Gamma(q)$ er en åpen undermengde av $C(q)$ og er derfor en Lie-gruppe. Det er nemlig lett å sjekke at multiplikasjonen i $C(q)$ er glatt; den er gitt ved kvadratiske polynomer i koordinatene. Med referanse til lemma 5 på side 10, finner man at

$$z_K = \sum_{I \triangle J = K} x_I y_J$$

dersom $\sum_{K\subseteq[1,n]} z_K e_K = (\sum_{I\subseteq[1,n]} x_I e_I)(\sum_{J\subseteq[1,n]} x_J e_J)$. Og det er lett å overbevise seg om at c er en en glatt avbildning.

Vi er på jakt etter undergrupper av $\Gamma(q)$ som tar verdier i den *ortogonale* gruppen $\mathrm{O}(V)$, og et svært viktig skritt i den retningen er følgende setning:

Setning 17 *Dersom $a \in C(q)$ er et element slik at $\alpha(a)v = va$ for alle $v \in V$, så er $a \in \mathbb{K}$. Sagt med andre ord,* $\mathrm{Ker}\, c_\star = \mathbb{K}^*$*, og vi har en eksakt sekvens*

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}^* \longrightarrow \Gamma(q) \xrightarrow{c_\star} \mathrm{Gl}(V)\ .$$

BEVIS: Anta at $a \in \mathrm{Ker}\, c_\star$ og dekomponer $a = a_0 + a_1$ med $a_i \in C^i(q)$. Fra hypotesen i setningen, får vi likheten

$$a_0 v - a_1 v = v a_0 + v a_1$$

som gjelder for alle $v \in V$. Det følger at

$$\begin{aligned} a_0 v &= v a_0 \\ -a_1 v &= v a_1, \end{aligned}$$

for $a_0 v$ og $v a_0$ er begge odde og $a_1 v$ og $v a_1$ begge jevne.

Siden vektorene i V genererer Clifford-algebraen, kan vi slutte fra den første av de to likhetene at a_0 er et sentralt element, og derfor er $a_0 \in Z\,(C(q)) \cap C^0(q) = \mathbb{K}$. Fra den andre følger det at a_1 sentraliserer $C^0(q)$. Så om n er jevn, er $a_1 \in (\mathbb{K}+\mathbb{K}\omega) \cap C^1(q) = 0$. Om n er odde er ω sentral og $\omega a_1 = a_1 \omega$, mens ligningene ovenfor gir at $-a_1\omega = \omega a_1$ fordi w er produkt av et odde elementer fra V. Det følger ar $-a_1\omega = a_1\omega$ som gir $a_1 = 0$ fordi ω er et invertibelt element i $C(q)$. ❑

Lemma 11 *Dersom $a \in \Gamma(q)$, så er $\overline{a} \in \Gamma(q)$ og $N(a) = a\overline{a} \in \operatorname{Ker} c_\star$*

Bevis: La $w \in V$. Da finnes en $v \in V$ slik at $\alpha(a)v = wa$. Det gir

$$\overline{a}\,\overline{w} = \overline{wa} = \overline{\alpha(a)v} = \overline{v}\,\overline{\alpha(a)}$$

og dermed $\overline{a}w = v\alpha(\overline{a})$. Ved å anvende α på begge sider av denne likheten finner vi $\alpha(\overline{a})w = v\overline{a}$, og derav følger $\overline{a} \in \Gamma(q)$.

Dersom $w = \alpha(a)va^{-1}$ vil $v = \alpha(a^{-1})wa$ og derfor $v = -\overline{v} = \overline{a}w\alpha(\overline{a}^{-1})$. Anvender vi α på den siste likheten, finner vi $v = \alpha(\overline{a})w\overline{a}^{-1}$, som gir

$$w = \alpha(a)va^{-1} = \alpha(a)\alpha(\overline{a})w\overline{a}^{-1}a^{-1} = \alpha(a\overline{a})w(a\overline{a})^{-1},$$

og det var det vi ville vise. ❑

Vi får nå som en umiddelbar konsekvens følgende fundamentale lemma:

Lemma 12 *Homomorfien $c_\star$ tar verdier i den ortogonale gruppen $\mathrm{O}(V)$.*

Bevis: La $v \in V$ og $a \in \Gamma(q)$. La vider $w = \alpha(a)va^{-1}$. Vi finner

$$\begin{aligned} q(w) = -w\overline{w} &= (\alpha(a)va^{-1})(\overline{a}^{-1}\overline{v\alpha(a)}) = \alpha(a)v(\overline{a}\,a)^{-1}v\alpha(\overline{a}) \\ = (\overline{a}\,a)^{-1}\alpha(a)v^2\alpha(\overline{a}) &= v^2(\overline{a}\,a)^{-1}\alpha(a\overline{a}) = v^2 = q(v) \end{aligned}$$

siden $a\overline{a}$ ligger i $\mathbb{K}^*$ etter lemma 11 ovenfor, og derfor er et sentralt element av grad 0, så $\alpha(a\overline{a}) = a\overline{a}$. ❑

Lemma 13 *Normen $N(a) = a\overline{a}$ er en gruppehomorfi*

$$N \colon \Gamma(q) \to \mathbb{K}^*.$$

Vi har $N(a) = a^2$ om a er en skalar.

Bevis: Vi har

$$N(ab) = ab\overline{ab} = ab\overline{b}\,\overline{a} = aN(b)\overline{a} = a\overline{a}N(b) = N(a)N(b)$$

siden $N(b)$ er et sentralt element etter lemma 11 ovenfor.

Om $a \in \mathbb{K}^*$ er en skalar, er så klart $\overline{a} = a$ og $N(a) = a^2$ ❑

Det fundamentale diagrammet Fører vi nå norm-avbildningen og $c_\star$ inn i samme diagram og bruker de egenskapene vi har etablert ovenfor, finner vi diagrammet ✱ nedenfor. Det er et kommutativt diagram av Lie-grupper der G per definisjon er kjernen til normavbildningen, og der rader og kolonner er eksakte

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{O}(V) \arrow[d, equal] & \\
1 \arrow[r] & \mathbb{K}^* \arrow[r] \arrow[d, "x^2"] & \Gamma(q) \arrow[r, "c_\star"] \arrow[d, "N"] & \mathrm{O}(V) \arrow[r] & 1 \\
 & \mathbb{K}^* \arrow[r, equal] & \mathbb{K}^* & &
\end{tikzcd} \tag{✱}$$

Vi har så langt ikke sjekket at $c_\star$ er surjektive, men det skal vi umiddelbart gjøre. Argumentet bygger på et resulatat som kalles Cartan-Dieudonnés teorem, og som forteller oss at ethvert element i $\mathrm{O}(V)$ er en sammensetning av refleksjoner, som betyr refleksjoner i det hyperplan vinklerett på vektorer med $q(v) \neq 0$. Slike vektorer kalles også *anisotrope*. Surjetiviteten av $c_\star$ følger da fra lemmaet nedenfor, som nettopp sier at enhver slik refleksjon ligger i bildet til $c_\star$:

Lemma 14 *La $v \in V$ være et element med $q(v) \neq 0$, altså et invertibelt element i V. Da er avbildnigen $c_v(w)$ en refleksjon i V gjennom hyperplanet vinkelrett på v; det vil si vi har:*

$$c_v(w) = w - 2q(v,w)/q(v,v)v$$

Bevis: Vi miner om at

$$vw + wv = 2q(v,w)$$

som gir

$$-wv = vw - 2q(v,w)$$

som multiplisert med $v^{-1} = q(v,v)^{-1}v$ gir

$$c_v(w) = -v^{-1}wv = w - 2q(v,w)q(v,v)^{-1}v.$$

❑

Vi observerer at siden enhver refleksjon er på formen $c_v(w)$, kan vi "snu" Cartan-Dieudonnés teorem rundt og konkludere med at elementene i $\Gamma(q)$ alle er produkter $v_1v_2 \ldots v_r$ av anisotrope elementer fra V. Om $a \in \Gamma(q)$, er nemlig den tilordnede ortogonale transformasjonen c_a et produkt av refleksjoner $c_{v_i}(\cdot)$, som på grunn av setning

17 betyr at $a = uv_1v_2 \dots v_r$ for en skalar u; men u kan jo inkorporeres i en av v_i-ene, siden $c_{uv}(\cdot) = c_v(\cdot)$. Vi har bevist:

Setning 18 *Gruppen $\Gamma(q)$ er generert av de elementene fra V som er invertible, det vil si av dem med $q(v) \neq 0$. Med andre ord har vi*

$$\Gamma(q) = \{\, v_1 \dots v_p \mid v_i \in V, p \in \mathbb{N} \,\}.$$

Det er nå naturlig å innføre gruppene $\mathrm{Spin}(q)$ og $\mathrm{Pin}(r,s)$. Vi lar $\mathrm{Pin}(q)$ være undergruppen av $\Gamma(q)$ bestående av produkter av vektorer v med $N(v) = \pm 1$, og $\mathrm{Spin}(q)$ lar vi være undergruppen av produkter av et en *jevnt* antall slike vektorer. Vi har altså:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pin}(q) &= \{\, v_1 \dots v_p \mid v_i \in V, N(v_i) = \pm 1, p \in \mathbb{N} \,\}, \\ \mathrm{Spin}(q) &= \{\, v_1 \dots v_{2p} \mid v_i \in V, N(v_i) = \pm 1, p \in \mathbb{N} \,\}. \end{aligned} \qquad (\bigstar)$$

Da har vi også at $\mathrm{Spin}(q) = \mathrm{Pin}(q) \cap C^0(q)$.

De tre "manglende surjeksjonene" i diagrammet oppfører seg forskjellig etter som formen q og grunnkroppen $\mathbb{K}$ varierer. Vi skal gjennomgå tilfelle for tilfelle, og starter med å anta at $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ og at q er negativt definitt.

Pin$(()q)$ og Spin(q) for definitte former

Formen q er positiv definitt

Vi skal anta at $q = q_{n,0}$, alle andre positiv definitte former er ekvivalent men en slik, og for enkelhets skyld skal $\mathrm{Pin}(n,0)$ betgnee $\mathrm{Pin}(q)$ og $\mathrm{Spin}(n,0)$ betegner $\mathrm{Spin}(q)$.

Vi har at $N(v) = -q(v) < 0$ for alle $v \in V$ forskjellig fra 0, noe som medfører at normavbildningen er surjektiv.

Siden $N(v_1 \cdot \dots \cdot v_r) = N(v_1) \cdot \dots \cdot N(v_r)$ og alle v_i-ene er av negativ norm, vil et element $a \in \Gamma$ være av negative norm hvis og bare hvis det kan uttrykkes som et produkt av et *odde* antall elementer fra V. Det betyr at $N(a) < 0$ hvis og bare hvis den ortogonale transformasjonen c_a er en sammensetning av et odde antall refleksjoner, eller sagt annerledes, hvis og bare hvis $\det c_a = -1$. Det fundamentale diagrammet ser derfor slik ut, der surjektiviteten til ρ, altså i det øverste høyre diagramhjørnet, følger av en ukomplisert diagramjakt:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spin}(n) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathrm{SO}(n) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d, "x^2"] & \Gamma(q) \arrow[r, "c_\star"] \arrow[d, "N"] & \mathrm{O}(n) \arrow[r] \arrow[d, "\det"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{R}^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Gruppen $\mathrm{Spin}(n, 0)$ kan også sees på som gruppen bestående av produkter av et *jevnt* antall elementer fra V alle med $q(v) = 1$:

$$\mathrm{Spin}(n, 0) = \{\, v_1 v_2 \dots v_{2p} \mid v_i \in V, q(v) = 1, p \in \mathbb{N} \,\}.$$

Teorem 2 *Gruppen* $\mathrm{Spin}(n, 0)$ *er sammenhengende om* $n \geq 2$*, og er den universelle overdekningsgruppen til* $\mathrm{SO}(n)$ *om* $n \geq 3$.

BEVIS: Siden $\mathrm{SO}(n)$ er sammenhengende, er det nok å sjekke at overdekningen $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ ikke er triviell. Dette vil følge om vi finner en sammenhengende kurve som forbinder de to elementene 1 og -1 i μ_2, og $(\cos te_1 + \sin te_2)(\cos te_1 - \sin te_2) = \cos 2t + \sin 2te_1e_2$ med $t \in [0, \pi/2]$ er en slik. Vi vet at $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ om $n \geq 3$, og det følger at $\mathrm{Spin}(n)$ er det universelle overdekningsrommet til $\mathrm{SO}(n)$. ❑

Gruppen $\mathrm{Pin}(n, 0)$ er ikke sammenhengende, men den har to sammenhengskomponenter, noe som følger av at den lever i følgende eksakte sekvens av grupper siden $\mathrm{Pin}(n, 0) = N^{-1}(\mu_2)$, og $\mathrm{Spin}(n, 0)$ er sammenhengende:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Pin}(n, 0) \xrightarrow{N} \mu_2 \longrightarrow 1,$$

Vi har også følgende eksakte sekvens

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n) \longrightarrow 1.$$

FORMEN q ER NEGATIV DEFINITT Da er formen q ekvivalent med standardfprmen $q_{0,n}$, og vi skal anta at de er like. Det er selvsagt slik at de to ortogonale gruppene $\mathrm{O}(q_{0,n})$ og $\mathrm{O}(q_{n,0})$ er identiske, dette siden en lineær avbildning bevarer formen q hvis og bare hvis den bevarer $-q$, så det ingen store nyheter i dette avsnittet når det gjelder gruppen $\mathrm{Spin}(0,n)$; med en gang vi har vist at $\mathrm{Spin}(0,n)$ er den universelle overdekningen til $\mathrm{O}(0,n)$ følger det at den er isomorf med $\mathrm{Spin}(n,0)$. Det er da naturlig å forenkle notasjonen til $\mathrm{Spin}(n)$.

Derimot er gruppene $\mathrm{Pin}(n,0)$ og $\mathrm{Pin}(0,n)$ i de fleste tilfeller forskjellige, selv om forskjellen er sublim, og vi skal etterhvret forklare dette.

I dette tilfellet når q er negativ definitt, er $N(v) = -v^2 = -q(v) > 0$ for alle v, og derfor er $N(v) > 0$ for alle $a \in \Gamma(q)$ etter setningen 18 ovenfor. Bildet til normavbildningen N er følgelig lik $\mathbb{R}^+$, som selvsagt også er bildet til x^2. Det følger at $\mathrm{Pin}(0,n) = \operatorname{Ker} N$.

Videre ligger en hver refleksjon i $\mathrm{O}(V)$ i bildet av G. Det følger siden alle refleksjoner er på formen c_v der $v \in V$ er en vektor med $|q(v)| = 1$, og altså $N(v) = 1$ i dette tilfellet. Vi finner diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pin}(0,n) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathrm{O}(n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d, "x^2"] & \Gamma(q) \arrow[r, "c_\star"] \arrow[d, "N"] & \mathrm{O}(n) \arrow[r] & 1 \\
 & \mathbb{R}^+ \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{R}^+ \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

der gruppen $\mathrm{Pin}(0,n)$ nå opptrer som kjernen til normavbildningen og

$$\mathrm{Pin}(0,n) = \{\, v_1 \dots v_p \mid v_i \in V, N(v_i) = 1, p \in \mathbb{N} \,\}.$$

Som vanlig er $\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap C^0(q_{0,n})$, og denne gruppen lever i den eksakt sekvensen

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1$$

For å etablere at gruppen $\mathrm{Spin}(n)$ slik den fremkommer her er den samme som gruppen $\mathrm{Spin}(n)$ i forrige tilfelle, holder det, siden universelle overdekningsrom er isomorfe, å vise at overdekningen ovenfor er ikketriviell. Det gjøres presis som tidligere, men med en liten justering av fortegnene. Vi ser på kurven $(\cos te_1 + \sin te_2)(-\cos te_1 + \sin te_2) = \cos 2t - \sin 2te_1e_2$ som forbinder elementene 1 og -1 i μ_2.

For ordens skyld gjentar vi:

Setning 19 *Gruppene* $\mathrm{Spin}(0,n)$ *og* $\mathrm{Spin}(n,0)$ *er naturlig isomorfe og betegnes med* $\mathrm{Spin}(n)$*. De er sammenhengende og enkeltsammenhengende og lever i den eksakte sekvensen:*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1$$

Således er $\mathrm{Spin}(n)$ *det universelle overdekningsrommet til* $\mathrm{SO}(n)$*.*

SENTERET TIL $\mathrm{Spin}(n)$ Det er som for alle grupper, av interesse å bestemme senteret til $\mathrm{Spin}(n)$. Nå er det slik at $C(q)$ har en lineær basis bestående av produktene e_I der I er en undermengde av $[1,n]$ med et jevnt antall elementer, og disse basiselementene er alle elemnter i $\mathrm{Spin}(n)$. Derfor består senteret til $\mathrm{Spin}(n)$ av de elementen i $Z(C^0(q))$ som også ligger i $\mathrm{Spin}(n)$. Vi fant i setning xxx at $Z(C^0(q)) = \mathbb{K}\cdot 1$ om n er odde og $Z(C^0(q)) = \mathbb{K}\cdot 1 + \mathbb{K}\omega$ om n er jevn.

Så om n er odde, er det greit, da er $Z(\mathrm{Spin}(n)) = \mu_2$. Er n jevn skal vi se t deneste elementene i $\mathbb{K}\cdot 1 + \mathbb{K}\omega$ av norm 1, er ± 1 og $\pm\omega$. Vi trenger følgende

$$\omega^t = (-1)^{n(n-1)/2}\omega = \begin{cases} \omega & \text{om } n \equiv 0 \bmod 4 \\ -\omega & \text{om } n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

som man viser ved en enkel induksjon. I setning 7 bestemte vi kvadratet ω^2, som i settingen her, der rangen er n er jevn og signaturen lik n, gir oss

$$\omega^2 = \begin{cases} 1 & \text{om } n \equiv 0 \bmod 4 \\ -1 & \text{om } n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

.

La nå $x = \alpha + \beta\omega \in Z(\mathrm{Spin}(n))$. Vi finner

$$N(x) = x\overline{x} = (\alpha + \beta\omega)(\alpha + \beta\omega^t) = \alpha^2 + \alpha\beta(1+\epsilon)\omega + \epsilon^2\beta^2$$

der $\epsilon = 1$ om $n \equiv 0 \mod 4$ og $\epsilon = -1$ om $n \equiv 2 \mod 4$. Det følger at de fire eneste elementene av norm en er ± 1 og $\pm\omega$. Vi har dermed etablert

Setning 20 *Dersom n er odde er* $Z(\mathrm{Spin}(n)) = \mu_2$*. Dersom n er jevn og $n \equiv 0 \mod 4$ er* $Z(\mathrm{Spin}(n)) = \mu_2 \times \mu_2$*, men er $n \equiv 2 \mod 4$ er* $Z(\mathrm{Spin}(n)) = \mu_4$*.*

☢ PIN OG PIN FRU BLOM De to gruppene $\mathrm{Pin}(0,n)$ og $\mathrm{Pin}(n,0)$ er ikke isomorfe[5] med mindre $n \equiv 0 \bmod 4$.

Vi skal i det som følger behandle tilfelle der n er odde, da er det rimelig enkelt å vise at de to Pin-gruppene ikke er isomorfe, deres sentre vil være forskjellige. De to Pin-gruppene har, som vi har sett, isomorfe enhetskomponenter, nemlig $\mathrm{Spin}(n)$, og de befinner seg defor begge i naturlige eksakte sekvensener av typen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{Pin}(-) \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow 0$$

der $\mathrm{Pin}(-)$ betegner enten $\mathrm{Pin}(0,n)$ eller $\mathrm{Pin}(n,0)$.

Om n er odde, skal vi, som sagt, sjekke at sentrene til $\mathrm{Pin}(n,0)$ og $\mathrm{Pin}(0,n)$ er forskjellige. Siden n er odde, er ω sentral, og man sjekker på lignende vis som i forrige paragraf at ± 1 og $\pm\omega$ er de eneste sentrale gruppeelementene. Det er derfor to muligheter for gruppestrukturen; den kan enten være $\mu_2 \times \mu_2$ eller μ_4. Vi skal se at om sentret til $\mathrm{Pin}(0,n)$ har den ene strukturen, har sentret til $\mathrm{Pin}(n,0)$ den andre.

Om gruppen $\{\pm 1, \pm\omega\}$ er lik $\mu_2 \times \mu_2$ eller μ_4 avgjøres av om $\omega^2 = 1$ eller $\omega^2 = -1$, som igjen avgjøres av signaturens restklassen mod fire. Nå har $\mathrm{Pin}(n,0)$ signatur n, mens $\mathrm{Pin}(0,n)$ har signatur $-n$, og restklassene til n og $-n$ mod 4 er selvsagt motsatte! Vi har vist:

Setning 21 *Anta at n er odde da gjelder*
i) Om $n \equiv 0 \mod 4$ så er $Z(\mathrm{Pin}(n,0)) = \mu_2 \times \mu_2$ og $Z(\mathrm{Pin}(0,n)) = \mu_4$.
ii) Om $n \equiv 2 \mod 4$ så er $Z(\mathrm{Pin}(n,0)) = \mu_4$ og $Z(\mathrm{Pin}(0,n)) = \mu_2 \times \mu_2$.

☢ Tilfellet n jevn henger. Det følger lett fra klassifikasjonen at $C_{0,4n} \simeq C_{4n,0}$, men det er som algebraer, og det gir ikke umiddelbart at $\mathrm{Pin}(0,4n) \simeq \mathrm{Pin}(4n,0)$. Det må nok et ben til suppen, om enn et lite et.

TILFELLET q INDEFINITT Vi starter med repetisjon av sammenhengsstrukturen til $\mathrm{O}(r,s)$ sett i lyset av teoremet til Cartan-Dieudonné.

La $V = V^+ \oplus V^{-1}$ være en ortogonal dekomposisjon av V slik at q er positiv på V^+ og negativ på V^-, og la $pr^{\pm}\colon V \to V^{\pm}$ betegne de to projeksjonsavbildningen.

Vi minner om at en vektor kalles *tidslik* om $q(v) > 0$ og *romlik* dersom $q(v) < 0$. Tilsvarende terminologi skal bruke om refleksjoner. En refleksjon c_v sier vi *tidslik* om v er tidslik, og den er *romlik* om v er det.

Velg så $a \in \mathrm{O}(q)$. Da er avbildningen $a' = pr^+ \circ a|_{V^+}$ invertibel; for, om $v^{\in} V^+$ er slik at $pr^+(a(v)) = 0$, så er $a(v) \in V^-$, og det er umulig siden a er en ortogonal avbildning og bevarer q. Det følger at $\det a'$ er forskjellig fra null. Man overbeviser seg lett om at fortegnet til $\det a'$ er uavhenig av hvilken dekomposisjon $V = V^+ \oplus V^-$ man velger.

[5] Dette er hva som står i litteraturen, men jeg har ikke funnet noe fullt ut skrevet bevis for denne påstanden. Derimot flere "tomme" referanser.

Vi lar som vanlig $\mathrm{SO}(q)$ være undergruppen av $\mathrm{O}(q)$ bestående av de a med $\det a > 0$ og vi lar $\mathrm{SO}(q)^+$ betegne undergruppen av $\mathrm{SO}(q)$ der $\det a' > 0$.

Vi har selvsagt.

Lemma 15 *$\mathrm{SO}(q)$ er undergruppen av $\mathrm{O}(q)$ bestående av elementer som er produktet av et* jevnt *antall refleksjoner.*

En presisjon av dette er følgende:

Lemma 16 *$\mathrm{SO}(q)^+$ er sammenehengende og betsår at undergruppen av $\mathrm{SO}(q)$ av elementer som er et produkt av et jevnt antall tidslike refleksjoner og et jevnt antall romlike refleksjoner.*

BEVIS: La oss minne om at $c_{v_1} \circ c_{v_2} = c_{v_2'} \circ c_{v_1}$ der $v_2' = c_{v_1} v_2$.

Det betyr at Cartan-Dieudonne kan presiseres; Enhver ortogonal transformasjon a kan skrives som et produkt $a = c_1 \dots c_p c_{p+1} \dots c_{p+q}$ der c_i er tidslik for $1 \leq i \leq p$ og c_i er romlik om $p+1 \leq i \leq p+q$.

Vi har sette at dersom $(r,s) \neq (1,1)$, så er kjeglene av romlike og tidslike vektorer begge sammenhengende. Velg en tidslik e_1 med $q(e_1) = 1$ og en romlik e_n med $q(e_n) = -1$. En hver tidslik refleksjon kan da deformeres kontinuerlig til c_{e_1} og en hver romlik til c_{e_n}. Det betyr at enhver ortogonal transformasjon kan deformeres til produktet $c_{e_1}^p c_{e_n}^q$. Og vi ser at a ligger i $\mathrm{SO}(q)^+$ hvis og bare hvis p er jevn.

❑

Da er q ekvivalent med en $q_{r,s}$ og vi skal anta at $q = q_{r,s}$. Vi har at $Nv = -q(v) < 0$ for noen $v \in V$ og $Nv = -q(v) > 0$ for andre, Uansett, det følger at normavbildningen N er surjektiv. Det gir oss diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{K}^* \arrow[r] \arrow[d, "x^2"] & \Gamma(r,s) \arrow[r, "c_\star"] \arrow[d, "N"] & \mathrm{O}(r,s) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{R}^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Vi minner om at $\mathrm{Pin}(r,s) = \{\, v_1 \dots v_p \mid v_i \in V, N(v_i) = \pm 1, p \in \mathbb{N} \,\}$ og at $\mathrm{Spin}(r,s)$ er undergruppen generert av et *jevnt* antall elementer. derfor betegnelse G, denne gruppen ere ikke lik $\mathrm{Spin}(r,s)$ siden den inneholder alle vektor med norm en. Men vi har eksakte sekvenser

$$0 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(r,s) \longrightarrow \mathrm{SO}(r,s) \longrightarrow 1$$

og som før viser vi at dette er ikke triviell overdekningi alle fall om $(r,s) \neq (1,1)$: La e_1 og e_2 være ortogonale med $e_1^2 = e_2^2 = \epsilon = \pm 1$. Vi ser på kurven $(\cos te_1 + \sin te_2)(\sin te_2 - \cos te_1) = \epsilon \cos 2t + \sin 2te_1e_2$.

Gruppene $\mathrm{Spin}(r,s)$ er ikke sammenhengendede om $rs \neq 0$, men har to sammenhengskomponenter. Vi lar $\mathrm{Spin}(+, r,s)$ være komponenten omkring enheten. Da har vi en eksakte sekvens

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(r,s)^+ \longrightarrow \mathrm{Spin}(r,s) \longrightarrow 1$$

og $\mathrm{Spin}(+, r,s)$ er den universelle overdekoningen til $\mathrm{SO}(r,s)^+$.

☢ Gruppene $\mathrm{Spin}(r,s)$ og $\mathrm{Spin}(s,r)$ er ikke isomorfe.

☢ $\mathrm{Spin}(r,s)$ er ikke enkeltsamenhengende om $r,s \geq 2$, men $\pi_1(\mathrm{Spin}(r,s)) \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dette følger av at den maksimale kompakte undergruppen av $\mathrm{SO}(r,s)^+$ er $\mathrm{SO}(r) \times \mathrm{SO}(s)$, og derfor har vi en homeomorgfi $\mathrm{SO}(r,s)^+ \simeq \mathrm{SO}(r) \times \mathrm{SO}(s) \times \mathbb{R}^{rs}$.

$\mathrm{Spin}(n)$ for lave verdier av n

Vi skal arbeide med algebraene $C_{0,n}$ slik at formen vår negativ definitt. Vi minner om setning 13 påside 18 so sier at vi har en normbevarende isomorfi $C_{0,n}^0 \simeq C_{0,n-1}$.

Vi minner også om at dersom indeksen $n \equiv 3 \mod 4$ så er indeksen til $q_{0,n}$ kongruent 1 mod 4, og derfor har vi en dekomposisjon $C_{0,n} = p^+C_{0,n-1} \oplus p^-C_{0,n-n}$. Vi har også etablert at projeksjonene $C_{0,n} \to C_{0,n-1}$ i det tilfellet er normbevarende.

Vi starter med å verifisere det vi for såvidt allerede har etablert:

Setning 22 $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2) \simeq \mathbb{S}^3$

BEVIS: Vi har at $C_{0,3}^0 \simeq C_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, og etter xxx er denne isomorfien normbevarende. Det betyr at $\mathrm{Spin}(3)$ avbildes inn i $\mathrm{sp}(1) = \mathrm{SU}(2) = \mathbb{S}^3$ ❑

Setning 23 $\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{Spin}(3) \times \mathrm{Spin}(3)$

BEVIS: Vi har at $C_{0,4}^0 \simeq C_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Isomorfien $C_{0,4}^0 \simeq C_{0,3}$ er normbevarende og det samme gjelder begge projeksjonen $C_{0,3} \to \mathbb{H}$. Derfor er $\mathrm{Spin}(4) \subseteq \mathrm{Spin}(3) \times \mathrm{Spin}(3)$, og siden begge er sammenhengende og av dimensjon 6, er de like. ❑

Neste mann ut er $\mathrm{Spin}(5)$:

Setning 24 Spin(5) $\simeq$ Sp(2)

BEVIS: Begge er av dimensjon 10 så det er nok å finne en inklusjon Spin(5)$\subseteq$ Sp(2). Nåer Spin(5)$\subseteq C^0_{0,5} \simeq \mathbb{C}_{0,4} \simeq \mathbb{H}(2)$ slik vi ser av tabellen vi ga når vi klassifiserte Cliffordalgebraene. Dt betyr at vi har en virkning av Spin(5) på $\mathbb{H}^2$, og siden Spin(5) er kompakt kan vi ved å midle et vilkårlig symplektisk skalarprodukt på $\mathbb{H}^2$ over Spin(5), finne ett som er invariant under virkningen av Spin(5). Det betyr at med dette skalarproduktet vil Spin(5)$\subseteq$ Sp(2). Nå er begge gruppene sammenhengende og begge er av dimensjon 10, så derfor er de like. ❑

Setning 25 Spin(6) $\simeq$ SU(4).

BEVIS: Dette går på akkurat samme måte. Vi vet at Spin(6)$\subseteq C^0_{0,6} \simeq C_{0,5} \simeq \mathbb{C}(4)$. Dette gir oss en virkning av Spin(6) på $\mathbb{C}^4$, og siden Spin(6) er kompakt, kan vi midle et hvilket som helst Hermitisk skalarprodukt på $\mathbb{C}^4$ over Spin(6) og få et som er invariant under Spin(6). Det gir oss en innleiring Spin(6)$\subseteq$ U(4). Determinanten gir oss en avbildning det: Spin(6) $\to \mathbb{S}^1$ som enten er konstant eller surjektiv siden Spin(6) er kompakt og sammenhengende. Hvis determinanten er surjektiv, har vi en fibrasjon

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Spin}(6) \xrightarrow{\det} \mathbb{S}^1 \longrightarrow 1$$

der $K = \operatorname{Ker}\det$. Siden Spin(6) er enkeltsammenhengende gir den tilsvarende langeksakte sekvensen av homotopigrupper en inklusjon $\mathbb{Z} = \pi_1\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \pi_0 K$ som er umulig siden K er kompakt og derfor kun har endelig mange sammenhengskomponenter.

Derfor er Spin(6)$\subseteq$ SU(4), men begge gruppene er sammenhengende og begge er av dimensjon 15, nemlig $15 = \binom{6}{2} = 4^2 - 1$, så de må være like. ❑

En siste bemerkning i denne paragrafen kan være at kompakhetsargumentet vi brukte i de to siste tilfellene, selvsagt virker for alle n. Kombinert med klassifikasjonstabellen gir dette en rekke innleiringer av spin-gruppene, men det er bare for lave n at dimensjonen faller sammen og gir oss likheter.

Oktonioner, Spin(7) og den eksepsjonelle gruppen G_2

Vi skal i denne paragrafen studere nøyer gruppen Spin(7) og en av dens representasjoner og derigjennom konstruere den eksepsjonelle gruppen G_2. For å være helt presis, skal vi lage den kompakte reelle formen av G_2. Som de fleste ander Lie-grupper kommer G_2 i flere tapninger, som for G_2's vedkommende består i en kompleks form, i en kompakt reell og en splitt reell form.

Gruppen G_2 er nøye forbundet med Cayley-tallene eller *oktonionene* som de også kalles. Disse ble konstruert av Cayley i 1845. Det var på den tiden en frenetisk aktivitet

rundt Hamiltons kvaternioner, og det ble gjort en rekke forsøk på å lage divisjonsalgebraer av høyere dimensjoner. Clifford-algebraene føyer seg ved siden av oktonionene inn i rekken av slike forsøk. *John C. Baez* har skrevet en lesverdig oversiktsartikkelom oktonionene (*The Octonions,* Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205 eller på hans hjemmeside
http://ma th.ucr.edu/home/baez/octonions/oct.pdf) efor::Mat4270Notes1::Kvaternionene

OKTONIONENE ELLER CAYLEY-TALLENE Oktonionen kan lages på flere måter, men vi skal her skissere det som kalles Cayley-Dickson-konstruksjonen. Det er en generell konstruksjon som fra en reell algebra A lager et produkt på den direkte summen $A \oplus A$. Fra $A = \mathbb{R}$ får man $\mathbb{C}$, fra $A = \mathbb{C}$ for man $\mathbb{H}$ og fra $A = \mathbb{H}$ får man altså $\mathbb{O}$, og det er det vi skal gjøre i dette avsnittet. Går man videre og lar $A = \mathbb{O}$, får man et produkt på $\mathbb{R}^{16}$, men praktisk talt uten annen struktur. Det dukker også opp nulldivisorer, og man ser sære fenomener som at elementer kan ha en venstreinvers samtidig som det har høyrenulldivisorer.

Tilbake til vår verden der vi skal konstruere oktonionen utifra kvarternionene $\mathbb{O}$. Produktet på $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ defineres ved formelen, som altså er Cayley-Dicksons konstruksjon:

$$x \cdot y = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - d\overline{b}, \overline{a}d + cb),$$

der $x = (a, b)$ og $y = (c, d)$, og der $\overline{q}$ er den konjugerte til en kvarternione q (se avsnittet om kvaternioner på side 16 i Notes 1). Dette produktet er klart bilineært i x og y. I samme slengen definerer vi den *konjugerte* til en oktonion $x = (a, b)$:

$$\overline{x} = (\overline{a}, -b).$$

Oktonioneproduktet er ikke assosiativt, men det har den egenskapen at enhver underalgebra generert av to elementer er assosiativ. Slike algebraer kalles ofte for *alternative*. Enhetselementet i $\mathbb{O}$ er $1 = (1, 0)$, og vi identifiserer $\mathbb{R}$ med undermengden $\mathbb{R} \cdot 1 \subseteq \mathbb{O}$ der alle medlemmene er sentrale i $\mathbb{O}$. Man sjekker at

$$\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}.$$

Om $x = (a, b)$ finner vi

$$x\overline{x} = (a, b)(\overline{a}, -b) = (a\overline{a} + \overline{b}\,b, 0),$$

og vi definerer *normen* til x ved $N(x) = x\overline{x}$. Da er $N(x)$ et ikke-negativt reelt tall som ligger i senteret til $\mathbb{O}$, og $N(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = 0$. Det følger at alle elementer x i $\mathbb{O}$ forskjellig fra null er invertible, med en invers gitt ved den ortodokse formelen

$$x^{-1} = N(x)^{-1}\overline{x}.$$

Videre lar vi *realdelen* til x være $\operatorname{Re} x = (x + \overline{x})/2$ og *imaginær delen* skal være $\operatorname{Im} x = (x - \overline{x})/2$. Dette gir en dekomposisjon $\mathbb{O} = \operatorname{Re}\mathbb{O} \oplus \operatorname{Im}\mathbb{O}$ der $\operatorname{Re}\mathbb{O} = \mathbb{R} \cdot 1$ består av de oktonionene med $x = \overline{x}$, og elementene fra $\operatorname{Im}\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^7$ er de *rent imaginære* som tilfredsstiller $x = -\overline{x}$.

KONSTRUKSJONEN AV G_2 Vi lar nå $V = \operatorname{Im}\mathbb{O}$, som altså er et syvdimensjonalt reellt vektorrom, og vi utstyrer V med standard negativ definitt kvadratisk form q. For rent imaginære oktonioner $v \in V$ lar vi γ_v betegne venstremultiplikasjon med v:

$$\gamma_v(x) = vx.$$

Da er $\gamma_v \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}, \mathbb{O}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^8)$ og vi har, siden $\mathbb{O}$ er en alternativ algebra, at

$$\gamma_v\gamma_v(x) = v(vx) = v^2 \cdot x = -v\overline{v}\, x = q(v)x.$$

Det viser at γ er en Clifford-avbildning fra $V = \operatorname{Im}\mathbb{O}$ inn i algebraen $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}, \mathbb{O})$, og siden Cliffordalgebraen $C_{0,7}$ er universell, kan γ utvides til en algebrahomomorfi $\gamma\colon C_{0,7} \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}, \mathbb{O})$. Restrikterer vi γ til gruppen $\operatorname{Spin}(7)$ finner vi en gruppehomomorfi

$$\gamma\colon \operatorname{Spin}(7) \to \operatorname{Gl}(\mathbb{R}, \mathbb{O}),$$

og $\operatorname{Spin}(7)$ virker på $\mathbb{O}$. Denne virkningen er normbevarende fordi for vektorer $v \in V$ gjelder det at

$$N(\gamma_v(x)) = \overline{vx}\,\overline{vx} = vx\overline{x}\,\overline{v} = q(v)N(x),$$

som gir at $N(g\cdot x) = N(g)N(x) = 1$ (der $N(g)$ er normen til g i $C_{0,7}$) fordi medlemmene av $\operatorname{Spin}(7)$ er av norm 1 i $C_{0,7}$. Og da er vi der vi vil være, og kan formulere:

Setning 26 *Virkningen av* $\operatorname{Spin}(7)$ *på* $\mathbb{O}$ *induserer en virkning av* $\operatorname{Spin}(7)$ *på enhetskulen* $\mathbb{S}^7$*, og denne virkningen er transitiv.*

BEVIS: Det gjenstår å vise transitivitet. Det er nok å vise at banen til ett punkt er hele $\mathbb{S}^7$, og vi skal gjøre det for enhetselementet 1. Fra den generelle teorien vet vi at kompakte grupper har baner som alltid er lukkede undermangfoldighter, så $B = \operatorname{Spin}(7)\cdot 1 \subseteq \mathbb{S}^7$ er en sammenhengende, lukket undermangfoldighet.

Det er en tautologi at $\gamma_v(1) = v\cdot 1 \in \operatorname{Spin}(7)\cdot 1 \subseteq \mathbb{S}^7$ hver gang $v \in \mathbb{S}^7 \cap \operatorname{Im}\mathbb{O}$. Men nå er $\mathbb{S}^7 \cap \operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{S}^6 \subseteq \mathbb{S}^7$ en lukket sammenhengende undermangfoldighet av dimensjon 6 inneholdt i banen $\operatorname{Spin}(7)\cdot 1 \subseteq \mathbb{S}^7$. Og banen er også en lukket, sammenhengende undermangfoldighet, så om $\operatorname{Spin}(7)\cdot 1 \subseteq \mathbb{S}^7$ ikke er hele $\mathbb{S}^7$, så er $\operatorname{Spin}(7)\cdot 1 = \mathbb{S}^6$.

For å avslutte, trenger vi ett punkt i banen som ikke ligger i $\mathbb{S}^6$, og enhetselementet er et slikt. Det er ikke rent imaginært (det er jo reellt) og vi har selvsagt at $\gamma_v(v^{-1}) = 1$, så enhetselementet ligger i banen $\operatorname{Spin}(7)\cdot 1$. ❑

Vi definerer nå gruppen G_2 til å være stabilisatorgruppen til enehetselementet

$$G_2 = \{\, g \in \operatorname{Spin}(7) \mid g \cdot 1 = 1 \,\}.$$

Teorem 3 *Gruppen G_2 er en kompakt, sammenhengende, enkeltsammenhengede Lie-gruppe av dimensjon 14 og rang 2.*

BEVIS: At dimensjinen er 14 følger av at $\dim G_2 = \dim \mathrm{Spin}(7) - \dim \mathbb{S}^7 = 21 - 7 = 14$.

Vi har en fibrasjonssekvens

$$G_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(7) \longrightarrow \mathbb{S}^7$$

som gir en langeksakte sekvens av homotopigrupper:

$$\pi_2\mathbb{S}^7 \longrightarrow \pi_1 G_2 \longrightarrow \pi_1 \mathrm{Spin}(7) \longrightarrow \pi_1\mathbb{S}^7 \longrightarrow \pi_0 G_2 \longrightarrow \pi_0 \mathrm{Spin}(7)$$

og siden $\pi_2\mathbb{S}^7 = \pi_1\mathbb{S}^7 = 0$ og $\pi_1 \mathrm{Spin}(7) = \pi_0 \mathrm{Spin}(7) = 0$ følger det at G_2 er sammenhengende og enkelt sammenhengdende.

Rangen til Spin(7) er tre, så G_2 er av rang høyst tre. Den kan ikke være av rang én, siden slike grupper alle er av dimensjon tre. Så det holder å sjekke at G_2 ikke er av rang tre, og for det er det nok å finne ett element i enhver maksimal torus i Spin(7) som ikke stabiliserer enhetselementet.

Beviset er ikke ferdig. Fortsettelse følger. ❑

Versjon: Thursday, November 15, 2012 5:30:21 PM