# UNIVERSITETET I OSLO
## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Underveiseksamen i: | MAT4300/3300 – Mål- og integrasjonsteori. |
| Eksamensdag: | Onsdag 13/10, 2004. |
| Tid for eksamen: | Kl. 09.00–12.00. |
| Vedlegg: | Ingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Godkjent kalkulator. |
| Oppgavesettet er på 1 side. | |

**Oppgave 1.** La $(X, \mathcal{C})$ være et målbart rom, og la $f$ være en utvidet reell funksjon på $X$.

a) Hva vil det si at $f$ er $\mathcal{C}$-målbar?

b) Vis at hvis $E \in \mathcal{C}$, så er den karakteristiske funksjonen $\chi_E$ $\mathcal{C}$-målbar. Er det omvendte riktig ($\chi_E$ $\mathcal{C}$-målbar $\Rightarrow E \in \mathcal{C}$)?

c) Vis at hvis $X = \mathbb{R}$ og $f$ en voksende funksjon på $X$, så er $f$ Borel-målbar. Er hver kontinuerlig funksjon på $X$ Borel-målbar?

d) Vis at hvis $f$ er målbar på $(X, \mathcal{C})$, så er $\{x : f(x) = \alpha\}$ målbar for alle reelle $\alpha$.

e) Vi lar nå $\mathcal{C}$ være $\sigma$-algebraen av alle delmengder $E$ av $[0, 1]$ slik at enten $E$ eller komplementet, $E^c$, til $E$ i $[0, 1]$ er tellbar. La $f(x) = x$ for alle $x$ i $[0, 1]$. Forklar at $\{x : f(x) = \alpha\}$ er $\mathcal{C}$-målbar for alle $\alpha \in \mathbb{R}$, men at funksjonen $f$ ikke er $\mathcal{C}$-målbar.

**Oppgave 2.** I denne oppgaven lar vi $\lambda$ være Lebesguemålet på $\sigma$-algebraen $\mathcal{B}$ av alle Borelmengder i $\mathbb{R}$. Alle svar skal begrunnes.

a) La $f(x) = \begin{cases} x^{-1/3}, & \text{når} \quad x \neq 0 \\ +\infty\,, & \text{når} \quad x = 0 \end{cases}.$
Avgjør om $f$ er Lebesgueintegrerbar på intervallet $[0, 1]$.

b) La $f_n(x) = e^{x-nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$. Finn $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda$.

c) Regn ut

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) \cos\left(\frac{x}{n}\right) d\lambda(x)$$

Sett $h_n(x) = \begin{cases} f_n(x)\cos(\frac{x}{n}) & \text{når } x \text{ er irrasjonal} \\ 1\,, & \text{når } x \text{ er rasjonal.} \end{cases}$
Hva er $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} h_n d\lambda$?

SLUTT