UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3300/4300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Torsdag 1. desember 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $(X, \mathcal{C}, \mu)$ være et målrom.

a) Vis at hvis (f_n) er en avtakende følge av ikkenegative, μ-integrerbare funksjoner på X, så eksisterer den punktvise grensen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, og

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x) d\mu(x).$$

b) Gi et eksempel på en avtakende følge (f_n) av ikkenegative, målbare funksjoner, slik at identiteten i a) ikke gjelder.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La λ være Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

a) Avgjør om funksjonen

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n,n+1)}$$

er Lebesgueintegrerbar på $\mathbb{R}$. Beregn også det uekte Riemannintegralet

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

b) La $g(x,y) = x\, f(x) e^{-xy}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bestem positivdelen g^+ og negativdelen g^- til g.

c) Avgjør om g er integrerbar på $\mathbb{R}^2$ med hensyn på produktmålet $\lambda \times \lambda$. Beregn også det itererte, uekte Riemannintegralet

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} g(x,y)dx\, dy$$

Oppgave 3.

La λ være Lebesguemålet på σ-algebraen $\mathcal{L}$ av alle Lebesguemålbare mengder på $\mathbb{R}$. Nedenfor kan du få bruk for at λ er ytre regulært, dvs. at for hver $E \in \mathcal{L}$, så fins åpne G_n, $G_n \supseteq E$ $(n = 1, 2, \ldots)$, slik at $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(G_n)$.

a) Anta at $f, g \in M^+(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ og at

$$\int_G f\, d\lambda = \int_G g\, d\lambda < +\infty,$$

for alle åpne mengder $G \subseteq \mathbb{R}$. Vis at

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda,$$

for alle $E \in \mathcal{L}$.

La nå $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være voksende og kontinuerlig deriverbar. La μ_F stå for Lebesgue-Stieltjes målet tilordnet F.

b) Hva er $\mu_F(a,b]$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$?
Vis at $\mu_F \ll \lambda$.

c) Vis at $\frac{d\mu_F}{d\lambda} = F'$ $\quad (\lambda - n.o.a.)$, der F' står for den deriverte til F.

SLUTT