UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT4300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Tirsdag 1. desember 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Om notasjonen. Vi lar $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ betegne σ-algebraen som består av alle Borel delmengdene av $\mathbb{R}$. Videre, hvis X er en mengde og $\mathcal{A}$ er en σ-algebra på X, så betegner $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ mengden av alle funksjonene fra X inn i $\mathbb{R}$ som er $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-målbare, og $\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid f \geq 0\}$.

Hvis $A \subset X$, lar vi $\mathbf{1}_A^X : X \to \{0,1\}$ betegne indikatorfunksjonen til A (i X). Dersom det ikke er fare for misforståelse, skriver vi bare $\mathbf{1}_A$.

Oppgave 1

La X være en (ikketom) mengde og la X', X'' være to disjunkte delmengder av X.

La $\mathcal{A}'$ være en σ-algebra på X' og $\mathcal{A}''$ være en σ-algebra på X''.

Videre, la μ' være et mål på $\mathcal{A}'$ og μ'' være et mål på $\mathcal{A}''$.

Vi definerer
$$\mathcal{A} = \{ \; A' \cup A'' \mid \; A' \in \mathcal{A}' \, , \; A'' \in \mathcal{A}''\} \, .$$

a) Vis at $\mathcal{A}$ er en σ-algebra på X. Vis også at den er den minste σ-algebraen på X som inneholder $\mathcal{A}'$ and $\mathcal{A}''$, det vil si, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}'')$.

La $A \in \mathcal{A}$. Da er $A = A' \cup A''$ for (entydige) $A' \in \mathcal{A}'$, $A'' \in \mathcal{A}''$, og vi kan derfor definere $\mu(A) \in [0, \infty]$ ved

$$\mu(A) = \mu'(A') + \mu''(A'') \, .$$

Ved å gjøre dette for hver $A \in \mathcal{A}$, får vi en avbildning $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

(Fortsettes på side 2.)

b) Sjekk at μ er et mål på $\mathcal{A}$, som stemmer overrens med μ' på $\mathcal{A}'$ og med μ'' på $\mathcal{A}''$. Sjekk også at μ er σ-endelig dersom μ' og μ'' er σ-endelige.

La $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

La f' betegne restriksjonen av f til X', f'' restriksjonen av f til X''.

c) Sjekk at $f' \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}')$. Tilsvarende har vi at $f'' \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A}'')$ (så du trenger ikke å argumentere for dette). Vis deretter at

$$\int f\, d\mu = \int f'\, d\mu' + \int f''\, d\mu''\,.$$

Hint. *Sjekk først at denne formelen holder for $f = \mathbf{1}_A^X$, der $A \in \mathcal{A}$.*

Oppgave 2

La $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et endelig målrom (dvs, μ er endelig), og la $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tilfredstille $0 \leq g(x) \leq 1$ for alle $x \in X$.

For hver $n \in \mathbb{N}$ definer $h_n : X \to \mathbb{R}$ by

$$h_n(x) = f(\, g(x)^n\,)\,,\; x \in X\,.$$

a) Vis at $h_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ for hver $n \in \mathbb{N}$ og at $\lim_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu$ eksisterer.

b) Beregn $\lim_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu$ når:

$X = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, *$\mu$ er tellemålet på $\mathcal{A}$,*

$g : X \to [0,1]$ *er gitt ved*

$$g(m) = \frac{1}{(m-1)(m-2)+1}\,, \quad m \in X,$$

og du vet at $f(0) = 1$, $f(1) = -4$.

Oppgave 3

La $(X, \mathcal{A}, \mu)$ være et målrom og la $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\mathcal{L}^1(\mu)$ som konvergerer punktvis μ-n.o. mot en $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Anta at det fins $N \in \mathbb{N}$ og $C \in \mathbb{R}\,, C > 0$, slik at $\|f_n - f_N\|_1 \leq C$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vis at $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Oppgave 4

Sett $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid A \subset (0,1]\,\}$ og la μ betegne restriksjonen av Lebesgue målet på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ til $\mathcal{A}$.

(Fortsettes på side 3.)

La ν være målet på $\mathcal{A}$ gitt ved

$$\nu(A) = \int_A \frac{x}{2}\, d\mu(x)\,, \quad A \in \mathcal{A}\,.$$

a) La $1 \le p < \infty$ *and definer* $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$. *Vis at* $\varphi \in \mathcal{L}^p(\nu)$ *hvis og bare hvis* $p < 4$.

La nå $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$.

Sett $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y \le 1\}$ og definer $F : (0,1] \times (0,1] \to \mathbb{R}$ ved

$$F(x,y) = \frac{x\, f(y)}{y}\, \mathbf{1}_D(x,y)\,, \quad (x,y) \in (0,1] \times (0,1]\,.$$

b) Vis at $F \in \mathcal{L}^1(\mu \times \mu)$.
(Du kan her droppe den delen av beviset som forklarer hvorfor $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$*).*

c) Vis at

$$\int_{(x,1]} \frac{|f(y)|}{y}\, d\mu(y) < \infty \quad \textit{for all } x \in (0,1]\,.$$

Forklar så hvorfor det er meningsfult å definere $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ *ved*

$$g(x) = 2 \int \mathbf{1}_{(x,1]}(y)\, \frac{f(y)}{y}\, d\mu(y)\,, \quad x \in (0,1]\,.$$

d) Vis at $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ *og* $\int g\, d\nu = \int f\, d\nu$.

SLUTT