UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT 4340 — Elementær funksjonalanalyse
Eksamensdag:	Fredag 4. desember 2009
Tid for eksamen:	09:00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La X og Y være normerte vektorrom, og anta at $A : X \to Y$ er en lineær avbildning.

(a) Hva vil det si at A er begrenset? Gi et eksempel på en lineær avbildning som ikke er begrenset. Begrunn svaret.

(b) La $x_0 \in X$ være gitt. Vis at A er begrenset hvis og bare hvis A er kontinuerlig i x_0.

Anta at $k : [a, b] \to \mathbb{C}$ er en kontinuerlig funksjon. Vi definerer en lineær avbildning A_k på Hilbertrommet $L^2[a, b]$ ved

$$(A_k f)(t) = k(t)f(t), \text{for alle } t \in [a, b], \text{ og alle } f \in L^2[a, b].$$

(c) Vis at A_k er begrenset og at $||A_k|| = \text{maks}\{|k(t)| : t \in [a, b]\}$

(d) Anta nå at $r \in \mathbb{R}$, og sett $k(t) = e^{irt}$, for alle $t \in [a, b]$. Vis at A_k er unitær. Bestem spekteret $\sigma(A_k)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

La H være et Hilbertrom, og anta at $S \in B(H)$ er en selvadjungert lineær operator.

(a) Forklar at det fins en selvadjungert operator $T \in B(H)$ slik at $T^3 = S$.

(b) Vis at spekteret $\sigma(S)$ inneholder minst en av verdiene $-||S||$ og $||S||$. Vink: Anta først at $||S|| = 1$ og vis at $1 \in \sigma(S^2)$.

Oppgave 3

La H være et uendelig dimensjonalt Hilbertrom og anta at $T \in B(H)$.

(a) Hva mener vi med at T er en kompakt operator? Anta at T er kompakt. Kan T ha en invers operator? Begrunn svaret.

Anta nå at $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for H. Vi lar $T \in B(H)$ være en operator som oppfyller

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Te_n||^2 < \infty.$$

(b) Vis at T er en kompakt operator.

SLUTT