UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT 4340 — Elementær funksjonalanalyse
Eksamensdag:	Mandag 6. desember 2010
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

(a) Hva mener vi med en ortonormal basis for et Hilbertrom H? Verifiser at hvis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for Hilbertrommet $L^2[a,b]$, så er $\{\overline{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ også en ortonormal basis for $L^2[a,b]$. (Her står $\overline{f}$ for den kompleks konjugerte til en funksjon f.) La K være den lineære avbildningen gitt ved

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\ \mathrm{d}t, \quad f \in L^2[a,b],$$

der vi antar at $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ er en gitt, kontinuerlig funksjon.

(b) Vis at K er begrenset.

(c) Anta at $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis av kontinuerlige funksjoner for $L^2[a,b]$. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ke_n||^2 = \int_a^b ||k_s||^2\ \mathrm{d}s,$$

der $k_s(t) = k(s,t)$, $s,t \in [a,b]$. Er K en kompakt operator? Gi en kort begrunnelse for svaret.

(d) La H være et Hilbertrom. Anta at $T \in B(H)$ oppfyller betingelsen

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ||Te_n||^2 < \infty,$$

der $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for H. La $A \in B(H)$. Vis at avbildningen AT oppfyller $(*)$. Bevis også at T^* og TA oppfyller $(*)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

La X og Y være normerte vektorrom. Bevis følgende tre utsagn:

(a) Mengden $K(X,Y)$ av alle kompakte lineære avbildninger fra X inn i Y danner et lineært underrom av $L(X,Y)$.

(b) Hvis $T \in L(X,Y)$ har endelig rang så er T en kompakt avbildning.

(c) Hvis H er et Hilbertrom og $T \in K(H)$, så har $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ endelig dimensjon hvis $\lambda \neq 0$.

(d) Gi et eksempel på en kompakt operator uten noen egenverdier.

Oppgave 3

La H være et Hilbertrom og anta at $T \in B(H)$.

(a) Hva mener vi med spektret $\sigma(T)$ til T? Vis at for hvert polynom p, så er

$$\sigma(p(T)) = \{p(\mu) \, : \, \mu \in \sigma(T)\}.$$

(b) Vis at hvis T er selvadjungert og $\sigma(T) = \{\lambda, -\lambda\}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, så er λ og $-\lambda$ egenverdier for T. **Vink:** Bruk (a).

(c) Spektret til en viss selvadjungert lineær avbildning $S \in B(H)$ er $\sigma(S) = \{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Finn normen til S. Anta i tillegg at alle punktene $\lambda_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, er egenverdier for S. Er S en kompakt operator? Grunngi svaret.

SLUTT