UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT3400/4400 — Lineær analyse med anvendelser.
Eksamensdag:	Mandag, 6. desember, 2010.
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Bemerk: alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

La $L^2[-\pi,\pi]$ være Hilbertrommet av kvadratisk integrable funksjoner på $[-\pi,\pi]$ med hensyn til Lebesgue-målet hvor indre produktet er gitt ved $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}g(x)dx$. Det antas som kjent at funksjonene $e_n(x) = e^{inx}$ for $n \in \mathbb{Z}$ danner en ortonormal basis av $L^2[-\pi,\pi]$.

1a

Bestem Fourierrekken til funksjonen $f(x) = x^2$ på $[-\pi,\pi]$. Angi svaret ved hjelp av trigonometriske funksjoner.

1b

Betrakt Fourierrekken i (a): Er den punktvis konvergent? Er den uniform konvergent?

1c

Bruk punkt (b) til å bestemme summen av rekken $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m^2}$.

Oppgave 2

La $a < b$ være reelle tall, og la κ være en kontinuerlig funksjon på $[a,b]\times[a,b]$ med verdier i $\mathbb{C}$ slik at $\kappa(x,y) = \overline{\kappa(y,x)}$ for alle $x,y \in [a,b]$. La H være Hilbertrommet $L^2[a,b]$ av kvadratisk integrable funksjoner på $[a,b]$ med hensyn til Lebesgue-målet hvor indre produktet er gitt ved $\langle f,g\rangle =$

(Fortsettes på side 2.)

$\int_a^b \overline{f(y)} g(y) dy$. La K være den kompakte selv-adjungerte operatoren på H gitt ved

$$(Kf)(x) = \int_a^b \kappa(x,y) f(y) dy.$$

2a

Anta $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ er egenverdiene til K, og la $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ være en ortonormal følge i $L^2[a,b]$ slik at e_j er en egenvektor hørende til λ_j for hver $j \geq 1$. Vis at for hvert $x \in [a,b]$ gjelder at $\sum_{j=1}^\infty |(Ke_j)(x)|^2 \leq M^2(b-a)$, hvor vi betegner $M = \sup\{|\kappa(x,y)| \mid x, y \in [a,b]\}$. (Vink: Bruk Bessel's ulikhet for funksjonen $y \mapsto \kappa(y,x)$.)

2b

Bruk monoton konvergens teoremet til å vise at $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^2 \leq M^2(b-a)^2$.

Oppgave 3

La $L^2[0,1]$ være Hilbertrommet av kvadratisk integrable funksjoner på $[0,1]$ med hensyn til Lebesgue-målet hvor indre produktet er gitt ved $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(y)} g(y) dy$. Betrakt følgende Sturm-Liouville operator: $Lu = -u''$ med definisjonsmengde $\mathcal{D}(L) = \{f \in C^2[0,1] \mid f(0) = 0, f'(1) = 0\} \subset L^2[0,1]$. Det antas som kjent at alle egenverdiene til L er reelle.

Vis at $\alpha_n = (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$ er egenverdiene til L. Finn tilhørende normaliserte egenvektorer $\{u_n\}_{n \geq 1}$. Er L injektiv?

Oppgave 4

La H være et uendelig-dimensjonalt Hilbertrom og K en kompakt, selv-adjungert operator på H slik at $\ker(K) = \{0\}$. Finn en følge $\{A_n\}_{n \geq 1}$ av operatorer på H av endelig rang slik at for hvert x i H gjelder

$$\lim_{n \to \infty} A_n K x = x \text{ og } \lim_{n \to \infty} K A_n x = x.$$

SLUTT.