UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT3400/4400 — Lineær analyse med anvendelser.

Eksamensdag: Mandag, 5. December, 2011.

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Bemerk: alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

(20 poeng) La $L^2([-\pi,\pi])$ være Hilbertrommet av ekvivalens klasser av kvadratisk integrable funksjoner på $[-\pi,\pi]$ med hensyn til Lebesguemålet og med indre produkt gitt ved $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$ for $f,g \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. Det antas som kjent at funksjonene $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ for $n \in \mathbb{Z}$ danner en ortonormal basis av $L^2([-\pi,\pi])$.

Bestem Fourierrekken til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{hvis } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{hvis } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Angi svaret ved hjelp av trigonometriske funksjoner. Du kan bruke at $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ gjelder for alle $t \in \mathbb{R}$.

Oppgave 2

La $\kappa(x,y) = \frac{1}{3} - xy$ være definert på $[0,1]\times[0,1]$. La H være Hilbertrommet $L^2([0,1])$ av ekvivalens klasser av kvadratisk integrable funksjoner på $[0,1]$ med hensyn til Lebesguemålet og med indre produkt gitt ved $\langle f,g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx$ for $f,g \in \mathcal{L}^2([0,1])$. La K være den kompakte kompakte selvadjungerte operatoren på H gitt ved

$$(Kf)(x) = \int_0^1 \kappa(x,y)f(y)dy.$$

2a

(10 poeng) Finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer til K.

(Fortsettes på side 2.)

2b

(10 poeng) Formuler Fredholm-alternativet for en kompakt operator på et Hilbertrom. For operatoren K fra punkt 2a avgjør for hvilke elementer $g \in H$ det finns en entydig løsning til likningen $f = Kf + g$.

Oppgave 3

La $L^2([0,1])$ være Hilbertrommet av ekvivalens klasser av kvadratisk integrable funksjoner på $[0,1]$ med hensyn til Lebesguemålet og med indre produkt gitt ved $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)dx$ for $f, g \in \mathcal{L}^2([0,1])$. Det antas som kjent at $C^2([0,1]) \subset L^2([0,1])$.

3a

(10 poeng) La $q : [0,1] \to [0,\infty)$ være en kontinuerlig funksjon og la $Lu = -u'' + qu$ være Sturm-Liouville operatoren på et domene $\mathcal{D}(L) \subset C^2([0,1])$. Det antas som kjent at L kun har reelle egenverdier. Anta at $u(1)u'(1) - u(0)u'(0) \leq 0$ for alle $u \in \mathcal{D}(L)$ som oppfyller $Lu = \alpha u$. Vis at

$$\alpha \int_0^1 u^2(x)dx \geq \int_0^1 q(x)u^2(x)dx + \int_0^1 (u'(x))^2 dx.$$

Konkluder da at alle egenverdiene til L er positive eller like null.

3b

(20 poeng) La L være gitt ved $Lu = -u''$ på $\mathcal{D}(L) = \{u \in C^2([0,1]) : u'(0) = 0, u'(1) = 0\}$. Finn egenverdiene og tilhørende normaliserte egenvektorer til L.

Oppgave 4

La (X, Σ, μ) være et målrom og la λ være Lebesguemålet på σ-algebraen $\mathcal{B}$ av Borel delmengder av $\mathbb{R}$. La $1 \leq p < \infty$. Når det trenges antas $0 \cdot \infty = 0$.

4a

(5 poeng) La $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ være funksjonen $g(t) = t^{p-1}$. Vis at $\int_{(0,a]} g d\lambda = \frac{1}{p} a^p$ for ethvert $a > 0$.

La $f : X \to [0,\infty]$ være en målbar funksjon. Definer en funksjon $\phi_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ ved $\phi_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\})$.

4b

(5 poeng) Anta at f er på formen $f = a\chi_A$ hvor $a \geq 0$ og $A \in \Sigma$. Vis at $\phi_f = \mu(A)\chi_{(0,a)}$ og at $a^p \mu(A) = p \int_{(0,\infty)} g\phi_f d\lambda$.

(Fortsettes på side 3.)

4c

(10 poeng) Anta at f er på formen $f = \sum_{j=1}^{m} f_j$ hvor $f_j = a_j \chi_{A_j}$ der $a_j \geq 0$ og $A_j \in \Sigma$ for alle $j = 1, \ldots, m$ og slik at $A_j \cap A_k = \emptyset$ når $j \neq k$ (så f er en enkel, målbar, ikke-negativ funksjon på standard form). Vis at ϕ_f er Borel målbar og at

$$\int_X f^p d\mu = p \int_{(0,\infty)} g \phi_f d\lambda. \tag{1}$$

Vink: vis at $\phi_f = \sum_{j=1}^{m} \phi_{f_j}$.

4d

(10 poeng) For vilkårlig målbar $f : X \to [0, \infty]$ vis at ϕ_f er Borel målbar og at likheden (1) er oppfyldt.

SLUTT.