UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Ny/utsatt eksamen i: MAT4400 — Lineær analyse med anvendelser.

Eksamensdag: Fredag, 13. januar 2012

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Bemerk: alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

(20 poeng) La $L^2([-\pi,\pi])$ være Hilbertrommet av ekvivalens klasser av kvadratisk integrable funksjoner på $[-\pi,\pi]$ med hensyn til Lebesguemålet og med indre produkt gitt ved $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$ for $f,g \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$. Det antas som kjent at funksjonene $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ for $n \in \mathbb{Z}$ danner en ortonormal basis av $L^2([-\pi,\pi])$.

Bestem Fourierrekken til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } -\pi < x < 0 \\ x & \text{hvis } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Angi svaret ved hjelp av trigonometriske funksjoner.

Oppgave 2

La $\kappa(x,y) = \cos(x-y)$ være definert på $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. La H være Hilbertrommet $L^2([0,2\pi])$ av ekvivalens klasser av kvadratisk integrable funksjoner på $[0,2\pi]$ med hensyn til Lebesguemålet og med indre produkt gitt ved $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$ for $f,g \in \mathcal{L}^2([0,2\pi])$. La K være den kompakte operatoren på H gitt ved

$$(Kf)(x) = \int_0^{2\pi} \kappa(x,y)f(y)dy.$$

2a

(10 poeng) Finn egenverdiene til K. Beskriv tilhørende egenvektorer.

(Fortsettes på side 2.)

2b

(10 poeng) Finn to ortogonale egenvektorer svarende til den egenverdien som er $\neq 0$.

Oppgave 3

La H være Hilbertrommet $l^2(\mathbb{N})$ med indre-produkt $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j$ for $x = \{x_j\}_{j\geq 1}$ og $y = \{y_j\}_{j\geq 1}$ i H.

3a

(10 poeng) La $T \in \mathcal{L}(H)$ være en Hilbert-Schmidt operator, med andre ord en operator slik at $\sum_{j\geq 1} \|Tu_j\|^2 < \infty$ for en ortonormal basis $\{u_j\}_{j\geq 1}$. Vis at T^* også er en Hilbert-Schmidt operator.

3b

(20 poeng) La $\{\delta^j\}_{j\geq 1}$ være den kanoniske ortonormale basen i H gitt ved $\delta^j_k = 1$ når $j = k$ og $\delta^j_k = 0$ når $j \neq k$. La $T : H \to H$ være gitt på formen

$$Tf = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \langle \delta^j, f\rangle \delta^j.$$

Vis at T er en selv-adjungert Hilbert-Schmidt operator.

Oppgave 4

La Σ være en σ-algebra av delmengder av $\mathbb{R}$. For en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og et $a \in \mathbb{R}$ vi lar f_a betegne funksjonen $f_a(x) = f(x - a)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

4a

(10 poeng) Anta at $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ er på formen $f = \chi_A$ hvor $A \in \Sigma$, og la $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$. Vis at $f_a = \chi_{A+a}$ for alle $a \in \mathbb{R}$. Vis at f_a er en målbar funksjon.

La μ være et mål på $(\mathbb{R}, \Sigma)$ slik at følgende gjelder: for ethvert $A \in \Sigma$ og $a \in \mathbb{R}$ vi har $A + a \in \Sigma$ og $\mu(A) = \mu(A + a)$.

4b

(10 poeng) La $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ være en målbar funksjon på formen $f = \sum_{j=1}^{m} f_j$ hvor $f_j = a_j \chi_{A_j}$ der $a_j \geq 0$ og $A_j \in \Sigma$ for alle $j = 1, \ldots, m$ og slik

(Fortsettes på side 3.)

at $A_j \cap A_k = \emptyset$ når $j \neq k$ (så f er en enkel, målbar, ikke-negativ funksjon på standard form). Vis at

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f_a d\mu \tag{1}$$

for alle $a \in \mathbb{R}$.

4c

(10 poeng) For vilkårlig målbar $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ vis at (1) er oppfyldt.

SLUTT