UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 252 — Mangfoldigheter.
Eksamensdag:	Fredag 8. desember 2000.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) La X være vektorfeltet på $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$X(x,y) = (x+2y)\frac{\partial}{\partial x} + (2x+y)\frac{\partial}{\partial y}$$

Vis at avbildningen $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\alpha(t,x,y) = \left(\frac{x+y}{2}e^{3t} + \frac{x-y}{2}e^{-t}, \frac{x+y}{2}e^{3t} + \frac{y-x}{2}e^{-t}\right)$$

er flow til dette vektorfeltet.

b) La Y være vektorfeltet på $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$Y(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

Regn ut den Lie deriverte av Y med hensyn på X, $L_X Y$, direkte ved å bruke flowen i a).
Vis så ved direkte utregning av $L_X Y = [X,Y]$ der $[X,Y]$ er kommutator produktet $XY - YX$. Vis tilslutt at $L_X Y = -L_Y X$ ved å finne flowen til Y og beregne $L_Y X$ direkte utifra dette.

c) La $Z = (x-2y)\frac{\partial}{\partial x} + (-2x+y)\frac{\partial}{\partial y}$. La $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ der $x_0 \neq \pm y_0$. Vis at det fins et lokalt koordinatsystem rundt p_0 slik at koordinatvektorfeltene blir henholdsvis X og Z (det er ikke meningen du skal finne noe uttrykk for et slik koordinatsystem).

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$F(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$

a) Vis at de kritiske punktene til F er $\{(x, y, z)|x = y$ eller $x = z$ eller $y = z\}$.

b) La $F(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, w_0)$.
Vis at polynomet $g(t) = (t - x_0)(t - y_0)(t - z_0)$ bare avhenger av (u_0, v_0, w_0) og bruk dette til å finne $F^{-1}(u_0, v_0, w_0)$ og graden til F. (Du kan her uten bevis gå utifra at F er proper og at $\mathbb{R}^3$ har standard orientering.)

Oppgave 3.

a) La M være en C^∞ mangfoldighet av dimensjon n. La $p \in M$. Forklar hva som menes med en lokal derivasjon i p (det som i Spivak betegnes med "derivation at p"). Vis at om ℓ er en lokal derivasjon i p og g er en konstant funksjon på M så er $\ell(g) = 0$.

b) La nå N være en annen C^∞ mangfoldighet av dimensjon m. La $f : M \to N$ være en C^∞ avbildning. La $p \in M$ og la $f(p) = q \in N$. Vi definerer nå tangentrommene M_p og N_q som vektorrommene av lokale derivasjoner i henholdsvis p og q.
Gi definisjonen av den deriverte avbildningen

$$f_* : M_p \to N_q \ .$$

La nå $q_0 \in M$ og definer $i_{q_0} : M \to M \times N$ ved $i_{q_0}(p) = (p, q_0)$ for $p \in M$. Vis at i_{q_0} er en immersjon dvs. at $i_{q_0*} : M_p \to (M \times N)_{(p,q_0)}$ er injektiv.

c) La $(p_0, q_0) \in M \times N$ og definer
$F : M \times N$ ved $F(p, q) = (p, q_0)$ og
$G : M \times N \to M \times N$ ved $G(p, q) = (p_0, q)$.

La $\pi_M : M \times N \to M$ og $\pi_N : M \times N \to N$ være projeksjonene på henholdsvis M og N. Vis at den lineære avbildningen

$$F_* + G_* : (M \times N)_{(p_0,q_0)} \to (M \times N)_{(p_0,q_0)}$$

er lik identitetsavbildningen, og at hver $\ell \in (M \times N)_{(p_0,q_0)}$ kan skrives på en éntydig måte som en sum $\ell = \ell_1 + \ell_2$ der $\ell_1 \in \ker \pi_{N*}$ og $\ell_2 \in \ker \pi_{M*}$.

(Fortsettes side 3.)

d) La oss anta at det fins $\omega \in \Omega^n(M)$ og $\eta \in \Omega^m(N)$ slik at $\omega(p) \neq 0$ og $\eta(q) \neq 0$ for alle $p \in M$ og $q \in N$.
Vis at $(\pi_M^*(\omega)) \wedge (\pi_N^*(\eta))(p,q) \neq 0$ for alle $(p,q) \in M \times N$. Forklar hvorfor $M \times N$ er orienterbar.

e) La oss nå anta at M og N er orienterte, kompakte og uten rand og at ω og η er differensialformer som beskrevet i punkt d).
Vis at $\int\limits_{M\times N} (\pi_M^*(\omega)) \wedge (\pi_N^*(\eta)) = \int\limits_M \omega \int\limits_N \eta$ der $M \times N$ gis en passelig orientering.

f) Vis $\pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\eta)$ ikke er eksakt, der ω og η er formene beskrevet i punkt d) og M, N er som i e).

SLUTT