"An Introduction to Manifolds", Kapittel 22.

Erlend Fornæss Wold

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

May 7, 2020

22.0 Mangfoldigheter med rand - Integrasjon og Green's Teorem

22.0 Mangfoldigheter med rand - Integrasjon og Green's Teorem

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Vi gir $\mathcal{H}^n$ underromstoplogien i $\mathbb{R}^n$.

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Vi gir $\mathcal{H}^n$ underromstoplogien i $\mathbb{R}^n$. Vi lar $\partial\mathcal{H}^n$ betegne mengden

$$\partial\mathcal{H}^n := \{x \in \mathcal{H}^n : x_n = 0\}.$$

Vi skal snart definere mangfoldigheter med rand; topologiske rom lokalt modellert på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{H}^n$.

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Vi gir $\mathcal{H}^n$ underromstoplogien i $\mathbb{R}^n$. Vi lar $\partial\mathcal{H}^n$ betegne mengden

$$\partial\mathcal{H}^n := \{x \in \mathcal{H}^n : x_n = 0\}.$$

Vi skal snart definere mangfoldigheter med rand; topologiske rom lokalt modellert på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{H}^n$. Det er derfor viktig å ha et begrep om glatte funksjoner som ikke bare gjelder for åpne mengder.

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Vi gir $\mathcal{H}^n$ underromstoplogien i $\mathbb{R}^n$. Vi lar $\partial\mathcal{H}^n$ betegne mengden

$$\partial\mathcal{H}^n := \{x \in \mathcal{H}^n : x_n = 0\}.$$

Vi skal snart definere mangfoldigheter med rand; topologiske rom lokalt modellert på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{H}^n$. Det er derfor viktig å ha et begrep om glatte funksjoner som ikke bare gjelder for åpne mengder.

Definition

La $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig delmengde, og la $f : S \to \mathbb{R}$ være en avbilding.

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Vi gir $\mathcal{H}^n$ underromstoplogien i $\mathbb{R}^n$. Vi lar $\partial\mathcal{H}^n$ betegne mengden

$$\partial\mathcal{H}^n := \{x \in \mathcal{H}^n : x_n = 0\}.$$

Vi skal snart definere mangfoldigheter med rand; topologiske rom lokalt modellert på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{H}^n$. Det er derfor viktig å ha et begrep om glatte funksjoner som ikke bare gjelder for åpne mengder.

Definition

La $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig delmengde, og la $f : S \to \mathbb{R}$ være en avbilding. Vi sier at f er glatt i et punkt $p \in S$ dersom det fins en åpen mengde $U_p \subset \mathbb{R}^n$ og $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ med $\tilde{f}|_{S\cap U} = f|_{S\cap U}$.

22.1 Glatt invarians av områder i $\mathbb{R}^n$

Vi lar nå $\mathcal{H}^n$ betegne det lukkete øvre halvplanet i $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Vi gir $\mathcal{H}^n$ underromstoplogien i $\mathbb{R}^n$. Vi lar $\partial\mathcal{H}^n$ betegne mengden

$$\partial\mathcal{H}^n := \{x \in \mathcal{H}^n : x_n = 0\}.$$

Vi skal snart definere mangfoldigheter med rand; topologiske rom lokalt modellert på $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{H}^n$. Det er derfor viktig å ha et begrep om glatte funksjoner som ikke bare gjelder for åpne mengder.

Definition

La $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig delmengde, og la $f : S \to \mathbb{R}$ være en avbilding. Vi sier at f er glatt i et punkt $p \in S$ dersom det fins en åpen mengde $U_p \subset \mathbb{R}^n$ og $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ med $\tilde{f}|_{S\cap U} = f|_{S\cap U}$. En avbilding $F : S \to \mathbb{R}^m$ er glatt i $p \in S$ hvis alle komponentene til F er glatte i p.

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3) *La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, la $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig mengde, og la $f : U \to S$ være en diffeomorfi.*

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3) *La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, la $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig mengde, og la $f : U \to S$ være en diffeomorfi. Da er S en åpen mengde.*

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3)*La* $U \subset \mathbb{R}^n$ *være en åpen mengde, la* $S \subset \mathbb{R}^n$ *være en vilkårlig mengde, og la* $f : U \to S$ *være en diffeomorfi. Da er* S *en åpen mengde.*

Bevis: La q være et punkt i S.

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3) *La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, la $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig mengde, og la $f : U \to S$ være en diffeomorfi. Da er S en åpen mengde.*

Bevis: La q være et punkt i S. Da fins en åpen mengde $V_q \subset \mathbb{R}^n$ og en C^∞-glatt avbilding $g : V \to \mathbb{R}^n$ slik at $g \circ f : W \to \mathbb{R}^n$ er identitetsavilbildingen på en (liten nok) mengde som inneholder $p = g(q)$.

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3) *La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, la $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig mengde, og la $f : U \to S$ være en diffeomorfi. Da er S en åpen mengde.*

Bevis: La q være et punkt i S. Da fins en åpen mengde $V_q \subset \mathbb{R}^n$ og en C^∞-glatt avbilding $g : V \to \mathbb{R}^n$ slik at $g \circ f : W \to \mathbb{R}^n$ er identitetsavilbildingen på en (liten nok) mengde som inneholder $p = g(q)$. Da har vi at

$$\mathrm{Id} = D(g \circ f)(p)$$

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3) *La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, la $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig mengde, og la $f : U \to S$ være en diffeomorfi. Da er S en åpen mengde.*

Bevis: La q være et punkt i S. Da fins en åpen mengde $V_q \subset \mathbb{R}^n$ og en C^∞-glatt avbilding $g : V \to \mathbb{R}^n$ slik at $g \circ f : W \to \mathbb{R}^n$ er identitetsavilbildingen på en (liten nok) mengde som inneholder $p = g(q)$. Da har vi at

$$\mathrm{Id} = D(g \circ f)(p) = D(g(q)) \circ Df(p).$$

22.1 Glatt invarians av områder

Theorem

(22.3) *La $U \subset \mathbb{R}^n$ være en åpen mengde, la $S \subset \mathbb{R}^n$ være en vilkårlig mengde, og la $f : U \to S$ være en diffeomorfi. Da er S en åpen mengde.*

Bevis: La q være et punkt i S. Da fins en åpen mengde $V_q \subset \mathbb{R}^n$ og en C^∞-glatt avbilding $g : V \to \mathbb{R}^n$ slik at $g \circ f : W \to \mathbb{R}^n$ er identitetsavilbildingen på en (liten nok) mengde som inneholder $p = g(q)$. Da har vi at

$$\mathrm{Id} = D(g \circ f)(p) = D(g(q)) \circ Df(p).$$

Så $Df(p)$ er invertibel, og ved inverse funksjonsteorem fins $\tilde{W}_p \subset W$ slik at $f(\tilde{W}_p)$ er en åpen mengde. $\square$

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La* $U, V \subset \mathcal{H}^n$ *være åpne mengder, og la* $f : U \to V$ *være en diffeomorfi.*

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La $U, V \subset \mathcal{H}^n$ være åpne mengder, og la $f : U \to V$ være en diffeomorfi. Da har vi*

(a) *$f(U \cap (\mathcal{H}^n)^\circ)$ er en åpen mengde i $(\mathcal{H}^n)^\circ$, og*

(b) *$f(U \cap \partial\mathcal{H}^n)$ er en åpen mengde i $\partial\mathcal{H}^n$.*

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La* $U, V \subset \mathcal{H}^n$ *være åpne mengder, og la* $f : U \to V$ *være en diffeomorfi. Da har vi*

(a) $f(U \cap (\mathcal{H}^n)^\circ)$ *er en åpen mengde i* $(\mathcal{H}^n)^\circ$*, og*

(b) $f(U \cap \partial\mathcal{H}^n)$ *er en åpen mengde i* $\partial\mathcal{H}^n$*.*

Proof:. Vi har at (a) følger direkte fra forrige teorem.

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La $U, V \subset \mathcal{H}^n$ være åpne mengder, og la $f : U \to V$ være en diffeomorfi. Da har vi*

(a) *$f(U \cap (\mathcal{H}^n)^\circ)$ er en åpen mengde i $(\mathcal{H}^n)^\circ$, og*

(b) *$f(U \cap \partial\mathcal{H}^n)$ er en åpen mengde i $\partial\mathcal{H}^n$.*

Proof:. Vi har at (a) følger direkte fra forrige teorem. La så $p \in \partial\mathcal{H}^n$.

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La $U, V \subset \mathcal{H}^n$ være åpne mengder, og la $f : U \to V$ være en diffeomorfi. Da har vi*

(a) $f(U \cap (\mathcal{H}^n)^\circ)$ *er en åpen mengde i* $(\mathcal{H}^n)^\circ$*, og*

(b) $f(U \cap \partial\mathcal{H}^n)$ *er en åpen mengde i* $\partial\mathcal{H}^n$*.*

Proof:. Vi har at (a) følger direkte fra forrige teorem. La så $p \in \partial\mathcal{H}^n$. Velg $\epsilon > 0$ slik at $B_\epsilon(p) \cap \mathcal{H}^n \subset U$.

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La $U, V \subset \mathcal{H}^n$ være åpne mengder, og la $f : U \to V$ være en diffeomorfi. Da har vi*

(a) *$f(U \cap (\mathcal{H}^n)^\circ)$ er en åpen mengde i $(\mathcal{H}^n)^\circ$, og*

(b) *$f(U \cap \partial\mathcal{H}^n)$ er en åpen mengde i $\partial\mathcal{H}^n$.*

Proof:. Vi har at (a) følger direkte fra forrige teorem. La så $p \in \partial\mathcal{H}^n$. Velg $\epsilon > 0$ slik at $B_\epsilon(p) \cap \mathcal{H}^n \subset U$. Da er

$$f(\partial\mathcal{H}^n \cap B_\epsilon(p)) \subset \partial\mathcal{H}^n,$$

ellers får vi en motsigelse til (a) hvis vi ser på $g = f^{-1}$ nær $f(p)$.

22.1 Glatt invarians av områder

Proposition

22.4 *La $U, V \subset \mathcal{H}^n$ være åpne mengder, og la $f : U \to V$ være en diffeomorfi. Da har vi*

(a) *$f(U \cap (\mathcal{H}^n)^\circ)$ er en åpen mengde i $(\mathcal{H}^n)^\circ$, og*

(b) *$f(U \cap \partial\mathcal{H}^n)$ er en åpen mengde i $\partial\mathcal{H}^n$.*

Proof:. Vi har at (a) følger direkte fra forrige teorem. La så $p \in \partial\mathcal{H}^n$. Velg $\epsilon > 0$ slik at $B_\epsilon(p) \cap \mathcal{H}^n \subset U$. Da er

$$f(\partial\mathcal{H}^n \cap B_\epsilon(p)) \subset \partial\mathcal{H}^n,$$

ellers får vi en motsigelse til (a) hvis vi ser på $g = f^{-1}$ nær $f(p)$. Så nær p og $f(p)$ har vi at

$$f = (f_1(x), ..., f_n(x)) \text{ and } g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x))$$

med $f_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = g_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = 0.$

22.1 Glatt invarians av områder

Så om vi setter

$$\tilde{f}(x_1, ..., x_{n-1}) = (f_1(x_1, ..., x_{n-1}, ..., f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})),$$

og

$$\tilde{g}(x_1, ..., x_{n-1}) = (g_1(x_1, ..., x_{n-1}, ..., g_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})),$$

22.1 Glatt invarians av områder

Så om vi setter

$$\tilde{f}(x_1, ..., x_{n-1}) = (f_1(x_1, ..., x_{n-1}, ..., f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})),$$

og

$$\tilde{g}(x_1, ..., x_{n-1}) = (g_1(x_1, ..., x_{n-1}, ..., g_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})),$$

så er $\tilde{f}$ glatt nær p og $\tilde{g}$ glatt nær $f(p)$, med $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}$. $\square$

22.1 Glatt invarians av områder

Så om vi setter

$$\tilde{f}(x_1, ..., x_{n-1}) = (f_1(x_1, ..., x_{n-1}, ..., f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})),$$

og

$$\tilde{g}(x_1, ..., x_{n-1}) = (g_1(x_1, ..., x_{n-1}, ..., g_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})),$$

så er $\tilde{f}$ glatt nær p og $\tilde{g}$ glatt nær $f(p)$, med $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}$. $\square$

Remark

Vi har nå vist at $f : U \cap \partial\mathcal{H}^n \to V \cap \partial\mathcal{H}^n$ er en diffeomorfi.

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

Definition

En topologisk n-mangfoldighet med rand, er et "second countable" Hausdorff topologisk rom som er lokalt homeomorft med enten $\mathbb{R}^n$ eller $\mathcal{H}^n$.

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

Definition

En topologisk n-mangfoldighet med rand, er et "second countable" Hausdorff topologisk rom som er lokalt homeomorft med enten $\mathbb{R}^n$ eller $\mathcal{H}^n$.

- Et C^∞-atlas på M er et atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ slik at

$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

  er glatt for alle α, β.

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

Definition

En topologisk n-mangfoldighet med rand, er et "second countable" Hausdorff topologisk rom som er lokalt homeomorft med enten $\mathbb{R}^n$ eller $\mathcal{H}^n$.

- Et C^∞-atlas på M er et atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ slik at
$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$
er glatt for alle α, β.
- Et indre punkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in (\mathcal{H}^n)^\circ$ for en α,

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

Definition

En topologisk n-mangfoldighet med rand, er et "second countable" Hausdorff topologisk rom som er lokalt homeomorft med enten $\mathbb{R}^n$ eller $\mathcal{H}^n$.

- Et C^∞-atlas på M er et atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ slik at
$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$
er glatt for alle α, β.
- Et indre punkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in (\mathcal{H}^n)^\circ$ for en α,
- Et randpunkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in \partial\mathcal{H}^n$ for en α,

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

Definition

En topologisk n-mangfoldighet med rand, er et "second countable" Hausdorff topologisk rom som er lokalt homeomorft med enten $\mathbb{R}^n$ eller $\mathcal{H}^n$.

- Et C^∞-atlas på M er et atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ slik at
$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$
er glatt for alle α, β.
- Et indre punkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in (\mathcal{H}^n)^\circ$ for en α,
- Et randpunkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in \partial\mathcal{H}^n$ for en α,
- Vi betegner mengden av indre punkter med M° og mengden av randpunkter for ∂M, og merker oss fra Proposisjon 22.4 at M° og ∂M er disjunkte mengder,

22.2 + 22.3 Mangfoldighter med rand

Definition

En topologisk n-mangfoldighet med rand, er et "second countable" Hausdorff topologisk rom som er lokalt homeomorft med enten $\mathbb{R}^n$ eller $\mathcal{H}^n$.

- Et C^∞-atlas på M er et atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ slik at
$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$
er glatt for alle α, β.
- Et indre punkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in (\mathcal{H}^n)^\circ$ for en α,
- Et randpunkt i M er et punkt $p \in M$ slik at $\phi_\alpha(p) \in \partial\mathcal{H}^n$ for en α,
- Vi betegner mengden av indre punkter med M° og mengden av randpunkter for ∂M, og merker oss fra Proposisjon 22.4 at M° og ∂M er disjunkte mengder, og
- Ved beviset for Proposisjon 22.4 har vi at ∂M naturlig har strukturen til en $(n-1)$-dimensjonal mangfoldighet.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Observasjon (1)

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Observasjon (1) La M være en mangfoldighet med rand, a p være et randpunkt, og la (U_j, ϕ_j) være kart med $p \in U_j$ for $j = 1, 2$. Da fins en åpen mengde U om $\phi_1(p)$ i $\mathbb{R}^n$, og en utvidelse $\tilde{\phi}_{21}$ av $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ til U, slik at

$$\tilde{\phi}_{21} : U \to \tilde{\phi}_{21}(U)$$

er en diffeomorfi.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Observasjon (1) La M være en mangfoldighet med rand, a p være et randpunkt, og la (U_j, ϕ_j) være kart med $p \in U_j$ for $j = 1, 2$. Da fins en åpen mengde U om $\phi_1(p)$ i $\mathbb{R}^n$, og en utvidelse $\tilde{\phi}_{21}$ av $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ til U, slik at

$$\tilde{\phi}_{21} : U \to \tilde{\phi}_{21}(U)$$

er en diffeomorfi.

Observasjon (2) La $p \in \partial \mathcal{H}^n$, la U være en åpen omegn om p, og la $f \in C^\infty(U)$.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Observasjon (1) La M være en mangfoldighet med rand, a p være et randpunkt, og la (U_j, ϕ_j) være kart med $p \in U_j$ for $j = 1, 2$. Da fins en åpen mengde U om $\phi_1(p)$ i $\mathbb{R}^n$, og en utvidelse $\tilde{\phi}_{21}$ av $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ til U, slik at

$$\tilde{\phi}_{21} : U \to \tilde{\phi}_{21}(U)$$

er en diffeomorfi.

Observasjon (2) La $p \in \partial\mathcal{H}^n$, la U være en åpen omegn om p, og la $f \in C^\infty(U)$. La f_1 og f_2 være to utvidelser av f til en åpen omegn om p.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Observasjon (1) La M være en mangfoldighet med rand, a p være et randpunkt, og la (U_j, ϕ_j) være kart med $p \in U_j$ for $j = 1, 2$. Da fins en åpen mengde U om $\phi_1(p)$ i $\mathbb{R}^n$, og en utvidelse $\tilde{\phi}_{21}$ av $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ til U, slik at

$$\tilde{\phi}_{21} : U \to \tilde{\phi}_{21}(U)$$

er en diffeomorfi.

Observasjon (2) La $p \in \partial\mathcal{H}^n$, la U være en åpen omegn om p, og la $f \in C^\infty(U)$. La f_1 og f_2 være to utvidelser av f til en åpen omegn om p. Da er $\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(p)$ for $j = 1, ..., n$.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Tangentbunten TM til en C^{∞}-mangfoldighet med rand defineres som før.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Tangentbunten TM til en C^∞-mangfoldighet med rand defineres som før.

- For $p \in M$ betegner $C_p^\infty M$ vektorrommet av kimer av glatte funksjoner i p.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Tangentbunten TM til en C^∞-mangfoldighet med rand defineres som før.

- For $p \in M$ betegner $C_p^\infty M$ vektorrommet av kimer av glatte funksjoner i p.
- For $p \in M$ betegner T_pM vektorrommet av dervasjoner på $C_p^\infty M$.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Tangentbunten TM til en C^∞-mangfoldighet med rand defineres som før.

- For $p \in M$ betegner $C_p^\infty M$ vektorrommet av kimer av glatte funksjoner i p.
- For $p \in M$ betegner T_pM vektorrommet av dervasjoner på $C_p^\infty M$.
- For et lokalt kart (U_α, ϕ_α) og $p \in U$ har vi at

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$$

  er en basis for T_pM.

22.4 Tangentvektorer, differensialformer og orientering

Tangentbunten TM til en C^∞-mangfoldighet med rand defineres som før.

- For $p \in M$ betegner $C_p^\infty M$ vektorrommet av kimer av glatte funksjoner i p.
- For $p \in M$ betegner T_pM vektorrommet av dervasjoner på $C_p^\infty M$.
- For et lokalt kart (U_α, ϕ_α) og $p \in U$ har vi at

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$$

  er en basis for T_pM.
- Alle konstruksjoer slik som tangentbunten, kotangentbunten, k-former, osv., går gjennom som før.

22.5 Utadpekende vektorfelter

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$.

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$. La videre (U_k, ϕ_k) være koordinatkart for $k = 1, 2$, der $p \in U_i$.

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$. La videre (U_k, ϕ_k) være koordinatkart for $k = 1, 2$, der $p \in U_i$.

Vi får videre at $\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(p) = 0$ for $j = 1, ..., n-1$, og $\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) > 0$.

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$. La videre (U_k, ϕ_k) være koordinatkart for $k = 1, 2$, der $p \in U_i$.

Vi får videre at $\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(p) = 0$ for $j = 1, ..., n-1$, og $\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) > 0$.
Så hvis vi betrakter en tangentvektor

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$$

så har vi at $b = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)(a)$.

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$. La videre (U_k, ϕ_k) være koordinatkart for $k = 1, 2$, der $p \in U_i$.

Vi får videre at $\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(p) = 0$ for $j = 1, ..., n-1$, og $\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) > 0$.
Så hvis vi betrakter en tangentvektor

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$$

så har vi at $b = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)(a)$. Så fortegnet til a_n er det samme som fortegnet til b_n.

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$. La videre (U_k, ϕ_k) være koordinatkart for $k = 1, 2$, der $p \in U_i$.

Vi får videre at $\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(p) = 0$ for $j = 1, ..., n-1$, og $\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) > 0$.
Så hvis vi betrakter en tangentvektor

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$$

så har vi at $b = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)(a)$. Så fortegnet til a_n er det samme som fortegnet til b_n.

Definition

Vi sier at en tangent vektor $X_p \in T_pM$ med $p \in \partial M$ peker utover dersom $X_{p,n} < 0$.

22.5 Utadpekende vektorfelter

La nå M være en mangfoldighet med rand og la $p \in \partial M$. La videre (U_k, ϕ_k) være koordinatkart for $k = 1, 2$, der $p \in U_i$.

Vi får videre at $\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(p) = 0$ for $j = 1, ..., n-1$, og $\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(p) > 0$.
Så hvis vi betrakter en tangentvektor

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$$

så har vi at $b = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)(a)$. Så fortegnet til a_n er det samme som fortegnet til b_n.

Definition

Vi sier at en tangent vektor $X_p \in T_p M$ med $p \in \partial M$ peker utover dersom $X_{p,n} < 0$.

22.5 Utadpekende vektorfelter

Proposition

(22.10) *La M være en mangfoldighet med rand. Det fins et glatt vektorfelt $X \in V(M)$ slik at $X|_{\partial M}$ alltid peker utover.*

22.5 Utadpekende vektorfelter

Proposition

(22.10) *La M være en mangfoldighet med rand. Det fins et glatt vektorfelt $X \in V(M)$ slik at $X|_{\partial M}$ alltid peker utover.*

Bevis:

22.5 Utadpekende vektorfelter

Proposition

(22.10) *La M være en mangfoldighet med rand. Det fins et glatt vektorfelt $X \in V(M)$ slik at $X|_{\partial M}$ alltid peker utover.*

Bevis: La $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ være et atlas på M.

22.5 Utadpekende vektorfelter

Proposition

(22.10) *La M være en mangfoldighet med rand. Det fins et glatt vektorfelt $X \in V(M)$ slik at $X|_{\partial M}$ alltid peker utover.*

Bevis: La $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ være et atlas på M. For hver α setter vi

$$X_\alpha := -\frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}.$$

22.5 Utadpekende vektorfelter

Proposition

(22.10) *La M være en mangfoldighet med rand. Det fins et glatt vektorfelt $X \in V(M)$ slik at $X|_{\partial M}$ alltid peker utover.*

Bevis: La $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ være et atlas på M. For hver α setter vi

$$X_\alpha := -\frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}.$$

La $\{\chi_\alpha\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U_\alpha\}$, og sett

$$X := \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot X_\alpha.$$

22.5 Utadpekende vektorfelter

Proposition

(22.10) *La M være en mangfoldighet med rand. Det fins et glatt vektorfelt $X \in V(M)$ slik at $X|_{\partial M}$ alltid peker utover.*

Bevis: La $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ være et atlas på M. For hver α setter vi

$$X_\alpha := -\frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}.$$

La $\{\chi_\alpha\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U_\alpha\}$, og sett

$$X := \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot X_\alpha.$$

$$X = \sum_{i=1}^{m} \chi_{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} a_j^i \frac{\partial}{\partial x_j^{\alpha_1}}$$

22.6 Orientering av render

22.6 Orientering av render

Proposition

(22.11) *La M være en orienterbar glatt mangfoldighet med rand, og la ω være en ikke-forsvinnende n-form på M.*

22.6 Orientering av render

Proposition

(22.11) *La M være en orienterbar glatt mangfoldighet med rand, og la ω være en ikke-forsvinnende n-form på M. Videre la X være en glatt vektorfelt som peker utover på ∂M.*

22.6 Orientering av render

Proposition

(22.11) *La M være en orienterbar glatt mangfoldighet med rand, og la ω være en ikke-forsvinnende n-form på M. Videre la X være en glatt vektorfelt som peker utover på ∂M. Da er*

$$\iota_X \omega|_{\partial M}$$

en ikke forsvinnende $(n-1)$-form.

22.6 Orientering av render

Proposition

(22.11) *La M være en orienterbar glatt mangfoldighet med rand, og la ω være en ikke-forsvinnende n-form på M. Videre la X være en glatt vektorfelt som peker utover på ∂M. Da er*

$$\iota_X \omega|_{\partial M}$$

en ikke forsvinnende $(n-1)$-form. Så ∂M er orienterbar.

22.6 Orientering av render

Proposition

(22.11) *La M være en orienterbar glatt mangfoldighet med rand, og la ω være en ikke-forsvinnende n-form på M. Videre la X være en glatt vektorfelt som peker utover på ∂M. Da er*

$$\iota_X \omega|_{\partial M}$$

en ikke forsvinnende $(n-1)$-form. Så ∂M er orienterbar.

Vi bruker slike former til å gi ∂M en orientering.

22.6 Orientering av render

Proposition

(22.11) *La M være en orienterbar glatt mangfoldighet med rand, og la ω være en ikke-forsvinnende n-form på M. Videre la X være en glatt vektorfelt som peker utover på ∂M. Da er*

$$\iota_X \omega|_{\partial M}$$

en ikke forsvinnende $(n-1)$-form. Så ∂M er orienterbar.

Vi bruker slike former til å gi ∂M en orientering. La ω være en ikke-forsvinnende n-form på M, la X være et utatpekende vektorfelt på ∂M, og sett

$$\mu(p) = [(v_1, ..., v_{n-1})] \Leftrightarrow \iota_X \omega(v_1, ..., v_{n-1}) > 0.$$

for $p \in \partial M$.

Eksempel

Vi ser på $\mathcal{H}^n$ med standard koordinater $r_1, ..., r_n$ og orientering gitt av

$$\omega = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n.$$

Eksempel

Vi ser på $\mathcal{H}^n$ med standard koordinater $r_1, \ldots, r_n$ og orientering gitt av

$$\omega = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n.$$

Da har vi

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial r_{n-1}}\right)$$

Eksempel

Vi ser på $\mathcal{H}^n$ med standard koordinater $r_1, \dots, r_n$ og orientering gitt av

$$\omega = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n.$$

Da har vi

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r_{n-1}}\right) =$$

$$\omega\left(-\frac{\partial}{\partial r_n}, \frac{\partial}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r_n}\right)$$

Eksempel

Vi ser på $\mathcal{H}^n$ med standard koordinater $r_1, ..., r_n$ og orientering gitt av

$$\omega = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n.$$

Da har vi

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega(\frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_{n-1}}) =$$

$$\omega(-\frac{\partial}{\partial r_n}, \frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_n}) =$$

$$(-1)^n \cdot \omega(\frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_n}).$$

Eksempel

Vi ser på $\mathcal{H}^n$ med standard koordinater $r_1, ..., r_n$ og orientering gitt av

$$\omega = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n.$$

Da har vi

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega(\frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_{n-1}}) =$$

$$\omega(-\frac{\partial}{\partial r_n}, \frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_n}) =$$

$$(-1)^n \cdot \omega(\frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_n}).$$

Så vi ser at

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega = (-1)^n dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_{n-1},$$

Eksempel

Vi ser på $\mathcal{H}^n$ med standard koordinater $r_1, ..., r_n$ og orientering gitt av

$$\omega = dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n.$$

Da har vi

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega(\frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_{n-1}}) =$$

$$\omega(-\frac{\partial}{\partial r_n}, \frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_n}) =$$

$$(-1)^n \cdot \omega(\frac{\partial}{\partial r_1}, ..., \frac{\partial}{\partial r_n}).$$

Så vi ser at

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial r_n}} \omega = (-1)^n dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_{n-1},$$

og dermed at identitetsavbildingen definerer orientert atlas på $\partial\mathcal{H}^n$ for $n = 2k$, men ikke for $n = 2k - 1$.