De Rham-kohomologi

"An Introduction to Manifolds", Kapittel 24.

Erlend Fornæss Wold

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

May 11, 2020

24.0 Introduksjon

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M.

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$?

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega$$

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha)$$

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha$$

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

Så en nødvendig betingelse er at $d\omega = 0$.

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

Så en nødvendig betingelse er at $d\omega = 0$. Det viser seg at dette ikke er en tilstrekkelig betingelse, og det generelle svaret avhenger av topologien til M.

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

Så en nødvendig betingelse er at $d\omega = 0$. Det viser seg at dette ikke er en tilstrekkelig betingelse, og det generelle svaret avhenger av topologien til M. Vi begynner med å se på noen eksempler.

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

Så en nødvendig betingelse er at $d\omega = 0$. Det viser seg at dette ikke er en tilstrekkelig betingelse, og det generelle svaret avhenger av topologien til M. Vi begynner med å se på noen eksempler.

Example

(1) Se på 1-formen $\omega(t) = f(t)dt$ (der f er glatt) på $\mathbb{R}$.

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

Så en nødvendig betingelse er at $d\omega = 0$. Det viser seg at dette ikke er en tilstrekkelig betingelse, og det generelle svaret avhenger av topologien til M. Vi begynner med å se på noen eksempler.

Example

(1) Se på 1-formen $\omega(t) = f(t)dt$ (der f er glatt) på $\mathbb{R}$. Da er for det første $d\omega = 0$ av dimensjonsgrunner,

24.0 Introduksjon

I dette kapittelet stiller vi spørsmålet: la $\omega \in \Omega^k(M)$ for en glatt mangfoldighet M. Fins det en $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ slik at $d\alpha = \omega$? Merk først at dersom det fins en slik α så har vi

$$d\omega = d(d\alpha) = d^2\alpha = 0.$$

Så en nødvendig betingelse er at $d\omega = 0$. Det viser seg at dette ikke er en tilstrekkelig betingelse, og det generelle svaret avhenger av topologien til M. Vi begynner med å se på noen eksempler.

Example

(1) Se på 1-formen $\omega(t) = f(t)dt$ (der f er glatt) på $\mathbb{R}$. Da er for det første $d\omega = 0$ av dimensjonsgrunner, og hvis vi setter

$$g(t) := \int_0^t f(s)ds$$

så har vi at $\dot{g}(t) = f(t)$, så $dg = \omega$.

Introduksjon

Example

(2) Vi ser nå på formen

$$\omega(x, y) = \frac{-ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2},$$

en glatt 1-form på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Introduksjon

Example

(2) Vi ser nå på formen

$$\omega(x, y) = \frac{-ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2},$$

en glatt 1-form på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da er $d\omega = 0$, og vi lurer på om vi kan løse $df = \omega$ for en glatt funksjon f på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Introduksjon

Example

(2) Vi ser nå på formen

$$\omega(x,y) = \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2},$$

en glatt 1-form på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da er $d\omega = 0$, og vi lurer på om vi kan løse $df = \omega$ for en glatt funksjon f på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
I så fall ville vi hatt

$$\int_{S^1} \omega$$

Introduksjon

Example

(2) Vi ser nå på formen

$$\omega(x,y) = \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2},$$

en glatt 1-form på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da er $d\omega = 0$, og vi lurer på om vi kan løse $df = \omega$ for en glatt funksjon f på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
I så fall ville vi hatt

$$\int_{S^1} \omega = f(1,0) - f(1,0)$$

Introduksjon

Example

(2) Vi ser nå på formen

$$\omega(x, y) = \frac{-ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2},$$

en glatt 1-form på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da er $d\omega = 0$, og vi lurer på om vi kan løse $df = \omega$ for en glatt funksjon f på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
I så fall ville vi hatt

$$\int_{S^1} \omega = f(1, 0) - f(1, 0) = 0.$$

Introduksjon

Example

(2) Vi ser nå på formen

$$\omega(x,y) = \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2},$$

en glatt 1-form på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da er $d\omega = 0$, og vi lurer på om vi kan løse $df = \omega$ for en glatt funksjon f på $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
I så fall ville vi hatt

$$\int_{S^1} \omega = f(1,0) - f(1,0) = 0.$$

Men man regner lett ut at $\int_{S^1} \omega = 2\pi$, og det vil si at det ikke fins noen slik f.

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^*\omega$.

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^*\omega$. Av samme grunn som før er det nå ikke mulig å løse $df = \tilde{\omega}$ på S^1.

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^* \omega$. Av samme grunn som før er det nå ikke mulig å løse $df = \tilde{\omega}$ på S^1.
Nå skal vi se at i en viss forstand så genererer $\tilde{\omega}$ alle moteksempler til å løse $df = \alpha$ på S^1.

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^*\omega$. Av samme grunn som før er det nå ikke mulig å løse $df = \tilde{\omega}$ på S^1.
Nå skal vi se at i en viss forstand så genererer $\tilde{\omega}$ alle moteksempler til å løse $df = \alpha$ på S^1.

La α være en glatt (lukket) 1-form på S^1.

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^*\omega$. Av samme grunn som før er det nå ikke mulig å løse $df = \tilde{\omega}$ på S^1.
Nå skal vi se at i en viss forstand så genererer $\tilde{\omega}$ alle moteksempler til å løse $df = \alpha$ på S^1.

La α være en glatt (lukket) 1-form på S^1. Akkurat som i Eksempel **(1)** kunne vi nå prøvd å definere

$$f(\theta) = \int_0^\theta \alpha.$$

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^*\omega$. Av samme grunn som før er det nå ikke mulig å løse $df = \tilde{\omega}$ på S^1.
Nå skal vi se at i en viss forstand så genererer $\tilde{\omega}$ alle moteksempler til å løse $df = \alpha$ på S^1.

La α være en glatt (lukket) 1-form på S^1. Akkurat som i Eksempel **(1)** kunne vi nå prøvd å definere

$$f(\theta) = \int_0^\theta \alpha.$$

Men da kan det tenkes at $\int_{S^1} \alpha = c \neq 0$, så f er ikke en veldefinert funksjon.

Example

(3) La nå $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildingen, og sett $\tilde{\omega} = \iota^*\omega$. Av samme grunn som før er det nå ikke mulig å løse $df = \tilde{\omega}$ på S^1.
Nå skal vi se at i en viss forstand så genererer $\tilde{\omega}$ alle moteksempler til å løse $df = \alpha$ på S^1.

La α være en glatt (lukket) 1-form på S^1. Akkurat som i Eksempel **(1)** kunne vi nå prøvd å definere

$$f(\theta) = \int_0^\theta \alpha.$$

Men da kan det tenkes at $\int_{S^1} \alpha = c \neq 0$, så f er ikke en veldefinert funksjon. Men nå har vi at

$$\int_{S^1} \alpha - \frac{c}{2\pi}\tilde{\omega} = 0.$$

24.0 Introduksjon

Example

(3) Så

$$f(\theta) = \int_0^\theta \alpha - \frac{c}{2\pi}\tilde{\omega}$$

er veldefinert på S^1.

24.0 Introduksjon

Example

(3) Så

$$f(\theta) = \int_0^\theta \alpha - \frac{c}{2\pi}\tilde{\omega}$$

er veldefinert på S^1. Så

$$\alpha = \frac{c}{2\pi}\tilde{\omega} + df.$$

24.0 Introduksjon

Example

(3) Så

$$f(\theta) = \int_0^\theta \alpha - \frac{c}{2\pi}\tilde{\omega}$$

er veldefinert på S^1. Så

$$\alpha = \frac{c}{2\pi}\tilde{\omega} + df.$$

Det vil si at dersom vi introduserer ekvivalensrelasjonen $\sim$ definert ved $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = df$ på vektorrommet $Z^1(S^1)$ av alle lukkete 1-former på S^1, så har vi at

$$H^1(S^1) := (Z^1(S^1)/\sim) \approx \mathbb{R}.$$

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.
- Vi lar $Z^k(M)$ betegne vektorrommet av lukkede k-former på M (det vil si $\omega \in Z^k(M) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k(M), d\omega = 0$).

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.
- Vi lar $Z^k(M)$ betegne vektorrommet av lukkede k-former på M (det vil si $\omega \in Z^k(M) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k(M), d\omega = 0$).
- Vi lar $B^k(M)$ betegne vektorrommet av alle eksakte k-former på M (det vil si $\omega \in B^k(M) \Leftrightarrow \omega \in Z^k(M), \omega = d\alpha,\ \alpha \in \Omega^{k-1}(M)$).

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.
- Vi lar $Z^k(M)$ betegne vektorrommet av lukkede k-former på M (det vil si $\omega \in Z^k(M) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k(M), d\omega = 0$).
- Vi lar $B^k(M)$ betegne vektorrommet av alle eksakte k-former på M (det vil si $\omega \in B^k(M) \Leftrightarrow \omega \in Z^k(M), \omega = d\alpha$, $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$).
- Vi definerer de Rham kohomologien til M av grad k ($k \geq 0$) som

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.
- Vi lar $Z^k(M)$ betegne vektorrommet av lukkede k-former på M (det vil si $\omega \in Z^k(M) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k(M), d\omega = 0$).
- Vi lar $B^k(M)$ betegne vektorrommet av alle eksakte k-former på M (det vil si $\omega \in B^k(M) \Leftrightarrow \omega \in Z^k(M), \omega = d\alpha,\ \alpha \in \Omega^{k-1}(M)$).
- Vi definerer de Rham kohomologien til M av grad k ($k \geq 0$) som

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

Da er $H^k(M)$ et (ikke nødvendigvis endeligdimensjonalt) vektorrom.

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.
- Vi lar $Z^k(M)$ betegne vektorrommet av lukkede k-former på M (det vil si $\omega \in Z^k(M) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k(M), d\omega = 0$).
- Vi lar $B^k(M)$ betegne vektorrommet av alle eksakte k-former på M (det vil si $\omega \in B^k(M) \Leftrightarrow \omega \in Z^k(M), \omega = d\alpha$, $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$).
- Vi definerer de Rham kohomologien til M av grad k ($k \geq 0$) som

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

  Da er $H^k(M)$ et (ikke nødvendigvis endeligdimensjonalt) vektorrom.
- Vi lar $[\omega]$ betegne klassen til $\omega \in Z^k(M)$.

24.1 De Rham-kohomologi

- La nå M være en glatt mangfoldighet.
- Vi lar $Z^k(M)$ betegne vektorrommet av lukkede k-former på M (det vil si $\omega \in Z^k(M) \Leftrightarrow \omega \in \Omega^k(M), d\omega = 0$).
- Vi lar $B^k(M)$ betegne vektorrommet av alle eksakte k-former på M (det vil si $\omega \in B^k(M) \Leftrightarrow \omega \in Z^k(M), \omega = d\alpha$, $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$).
- Vi definerer de Rham kohomologien til M av grad k ($k \geq 0$) som

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

  Da er $H^k(M)$ et (ikke nødvendigvis endeligdimensjonalt) vektorrom.
- Vi lar $[\omega]$ betegne klassen til $\omega \in Z^k(M)$.
- Vi ser at ω er kohomolog med ω' dersom $[\omega] = [\omega']$ hvilket da betyr at $\omega' = \omega + d\alpha$.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.1 *La M være en glatt mangfoldighet med k sammenhengskomponenter* $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.1 *La* M *være en glatt mangfoldighet med* k *sammenhengskomponenter* $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. *Da er* $H^0(M) \approx \mathbb{R}^k$, *og elementer i* $H^0(M)$ *er* k*-tupler* $(r_1, ..., r_k)$, *der* r_j *er assosiert til* M_j.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.1 *La M være en glatt mangfoldighet med k sammenhengskomponenter $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Da er $H^0(M) \approx \mathbb{R}^k$, og elementer i $H^0(M)$ er k-tupler $(r_1, \ldots, r_k)$, der r_j er assosiert til M_j.*

Bevis: La $f \in Z^0(M)$.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.1 *La M være en glatt mangfoldighet med k sammenhengskomponenter $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Da er $H^0(M) \approx \mathbb{R}^k$, og elementer i $H^0(M)$ er k-tupler $(r_1, ..., r_k)$, der r_j er assosiert til M_j.*

Bevis: La $f \in Z^0(M)$. Da er f en glatt funksjon på M, og kan representeres av et k-tuppel $(f_1, ...f_k)$ av glatte funksjoner, der f_j er en glatt funksjon på M_j.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.1 *La M være en glatt mangfoldighet med k sammenhengskomponenter $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Da er $H^0(M) \approx \mathbb{R}^k$, og elementer i $H^0(M)$ er k-tupler $(r_1, ..., r_k)$, der r_j er assosiert til M_j.*

Bevis: La $f \in Z^0(M)$. Da er f en glatt funksjon på M, og kan representeres av et k-tuppel $(f_1, ...f_k)$ av glatte funksjoner, der f_j er en glatt funksjon på M_j. Videre har vi at $df = 0$, hvilket vil si at $df_j = 0$ for alle j, så det vil si at $f_j = r_j \in \mathbb{R}$, og vi har at $Z^0(M) = \mathbb{R}^k$.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.1 *La M være en glatt mangfoldighet med k sammenhengskomponenter $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$. Da er $H^0(M) \approx \mathbb{R}^k$, og elementer i $H^0(M)$ er k-tupler $(r_1, ..., r_k)$, der r_j er assosiert til M_j.*

Bevis: La $f \in Z^0(M)$. Da er f en glatt funksjon på M, og kan representeres av et k-tuppel $(f_1, ...f_k)$ av glatte funksjoner, der f_j er en glatt funksjon på M_j. Videre har vi at $df = 0$, hvilket vil si at $df_j = 0$ for alle j, så det vil si at $f_j = r_j \in \mathbb{R}$, og vi har at $Z^0(M) = \mathbb{R}^k$.
Til slutt har vi at $B^0(M) = \emptyset$, så vi har at

$$H^0(M) = Z^0(M)/B^0(M) = Z^0(M).$$

$\square$.

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.2 *La M være en glatt mangfoldighet av dimensjon n. Da er $H^k(M) = 0$ for alle $k > n$.*

24.1 De Rham-kohomologi

Proposition

24.2 *La M være en glatt mangfoldighet av dimensjon n. Da er $H^k(M) = 0$ for alle $k > n$.*

Bevis: Vi har at $\Omega^k(M) = 0$ for alle $k > n$. $\square$

24.2 Eksempler på de Rham-kohomologi.

24.2 Eksempler på de Rham-kohomologi.

Vi har allerede sett i introduksjonen at

$$H^1(\mathbb{R}) = 0$$

24.2 Eksempler på de Rham-kohomologi.

Vi har allerede sett i introduksjonen at

$$H^1(\mathbb{R}) = 0$$

og så har vi nå sett at $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ og at $H^k(\mathbb{R}) = 0$ for $k > 1$.

24.2 Eksempler på de Rham-kohomologi.

Vi har allerede sett i introduksjonen at

$$H^1(\mathbb{R}) = 0$$

og så har vi nå sett at $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ og at $H^k(\mathbb{R}) = 0$ for $k > 1$.

Vi har også sett i introduksjonen at

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

24.2 Eksempler på de Rham-kohomologi.

Vi har allerede sett i introduksjonen at

$$H^1(\mathbb{R}) = 0$$

og så har vi nå sett at $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ og at $H^k(\mathbb{R}) = 0$ for $k > 1$.

Vi har også sett i introduksjonen at

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

og så har vi nå sett at $H^0(S^1) = \mathbb{R}$ og at $H^k(S^1) = 0$ for $k > 1$.

24.2 Eksempler på de Rham-kohomologi.

Vi har allerede sett i introduksjonen at

$$H^1(\mathbb{R}) = 0$$

og så har vi nå sett at $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ og at $H^k(\mathbb{R}) = 0$ for $k > 1$.

Vi har også sett i introduksjonen at

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

og så har vi nå sett at $H^0(S^1) = \mathbb{R}$ og at $H^k(S^1) = 0$ for $k > 1$. Så i begge disse tilfellene er bildet komplett.

24.3 Tilbaketrekning av kohomologiklasser

24.3 Tilbaketrekning av kohomologiklasser

La nå $f : M \to N$ være en glatt avbilding mellom mangfoldigheter M og N.

24.3 Tilbaketrekning av kohomologiklasser

La nå $f : M \to N$ være en glatt avbilding mellom mangfoldigheter M og N. Vi skal nå se at f induserer en avbilding

$$f^\sharp : H^k(N) \to H^k(M).$$

24.3 Tilbaketrekning av kohomologiklasser

La nå $f : M \to N$ være en glatt avbilding mellom mangfoldigheter M og N. Vi skal nå se at f induserer en avbilding

$$f^\sharp : H^k(N) \to H^k(M).$$

Vi definerer rett og slett $f^\sharp[\omega] = [f^*\omega]$.

24.3 Tilbaketrekning av kohomologiklasser

La nå $f : M \to N$ være en glatt avbilding mellom mangfoldigheter M og N. Vi skal nå se at f induserer en avbilding

$$f^\sharp : H^k(N) \to H^k(M).$$

Vi definerer rett og slett $f^\sharp[\omega] = [f^*\omega]$. Merk at $df^*\omega = f^*d\omega$ så dersom $\omega \in Z^k(N)$ så er $f^*\omega \in Z^k(M)$.

24.3 Tilbaketrekning av kohomologiklasser

La nå $f : M \to N$ være en glatt avbilding mellom mangfoldigheter M og N. Vi skal nå se at f induserer en avbilding

$$f^\sharp : H^k(N) \to H^k(M).$$

Vi definerer rett og slett $f^\sharp[\omega] = [f^*\omega]$. Merk at $df^*\omega = f^*d\omega$ så dersom $\omega \in Z^k(N)$ så er $f^*\omega \in Z^k(M)$. Og hvis $\omega = d\alpha$, så har vi at $df^*\alpha = f^*d\alpha = f^*\omega$, så tilbaketrekningen respekterer kohomologiklasser, og vi ser at $f^\sharp$ er veldefinert.

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$.

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$. Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$. Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$. Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$. Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

Vi viser (ii):

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$.
Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

Vi viser (ii):

$$[\alpha + df] \wedge [\beta + dg]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$.
Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

Vi viser (ii):

$$[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [(\alpha + df) \wedge (\beta + dg)]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$. Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

Vi viser (ii):

$$[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [(\alpha + df) \wedge (\beta + dg)] =$$

$$[\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge dg + df \wedge \beta + df \wedge dg]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$.
Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

Vi viser (ii):

$$[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [(\alpha + df) \wedge (\beta + dg)] =$$

$$[\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge dg + df \wedge \beta + df \wedge dg] =$$

$$[\alpha \wedge \beta \pm d(\alpha \wedge \beta) + d(f \wedge \beta) + d(f \wedge dg)]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

La nå M være en glatt mangfoldighet, og la $[\alpha] \in H^k(M), [\beta] \in H^l(M)$.
Vi definerer nå

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta] \in H^{k+l}(M).$$

Da må vi vise at

(i) $\alpha \wedge \beta \in Z^{k+l}(M)$.

(ii) $[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [\alpha] \wedge [\beta]$.

Vi viser (ii):

$$[\alpha + df] \wedge [\beta + dg] = [(\alpha + df) \wedge (\beta + dg)] =$$

$$[\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge dg + df \wedge \beta + df \wedge dg] =$$

$$[\alpha \wedge \beta \pm d(\alpha \wedge \beta) + d(f \wedge \beta) + d(f \wedge dg)] = [\alpha \wedge \beta].$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M.

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^n H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l} [\beta \wedge \alpha]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l}[\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1}[\beta] \wedge [\alpha]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå
$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$
Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at
$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l} [\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1} [\beta] \wedge [\alpha],$$
så den graderte ringen er anti-kommutativ.

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l}[\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1}[\beta] \wedge [\alpha],$$

så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

så har vi

$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta])$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl}\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l}[\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1}[\beta] \wedge [\alpha],$$

så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

så har vi

$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta]) = f^\sharp([\alpha \wedge \beta])$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^n H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl}\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l}[\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1}[\beta] \wedge [\alpha],$$

så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

så har vi

$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta]) = f^\sharp([\alpha \wedge \beta]) = [f^*(\alpha \wedge \beta)]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå
$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$
Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at
$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l}[\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1}[\beta] \wedge [\alpha],$$
så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$
så har vi
$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta]) = f^\sharp([\alpha \wedge \beta]) = [f^*(\alpha \wedge \beta)] =$$
$$[f^*\alpha \wedge f^*\beta]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^n H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l} [\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1} [\beta] \wedge [\alpha],$$

så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

så har vi

$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta]) = f^\sharp([\alpha \wedge \beta]) = [f^*(\alpha \wedge \beta)] =$$

$$[f^*\alpha \wedge f^*\beta] = [f^*\alpha] \wedge [f^*\beta]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå

$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^{n} H^k(M).$$

Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l} [\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1} [\beta] \wedge [\alpha],$$

så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$

så har vi

$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta]) = f^\sharp([\alpha \wedge \beta]) = [f^*(\alpha \wedge \beta)] =$$

$$[f^*\alpha \wedge f^*\beta] = [f^*\alpha] \wedge [f^*\beta] = f^\sharp[\alpha] \wedge f^\sharp[\beta]$$

24.4 Ring-struktur på de Rham-kohomologi

Vi setter nå
$$H^*(M) = \oplus_{k=0}^n H^k(M).$$
Dette er i utgangspunktet et vektorrom over $\mathbb{R}$, og hvis vi innfører multiplikasjon via $[\alpha] \wedge [\beta]$ som over, og linearitet, får vi en gradert ring som vi kaller kohomolgiringen til M. Vi har at
$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] = [(-1)^{kl} \beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+l}[\beta \wedge \alpha] = (-1)^{k+1}[\beta] \wedge [\alpha],$$
så den graderte ringen er anti-kommutativ.

Merk at dersom $f : M \to N$ er en glatt avbilding, siden
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta,$$
så har vi
$$f^\sharp([\alpha] \wedge [\beta]) = f^\sharp([\alpha \wedge \beta]) = [f^*(\alpha \wedge \beta)] =$$
$$[f^*\alpha \wedge f^*\beta] = [f^*\alpha] \wedge [f^*\beta] = f^\sharp[\alpha] \wedge f^\sharp[\beta],$$
så $f^\sharp : \oplus_{k=0}^n H^k(N) \to \oplus_{k=0}^n H^k(M)$ er en ring-homomorfi.