Mayer-Vietoris-sekvensen

"An Introduction to Manifolds", Kapittel 26.

Erlend Fornæss Wold

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

May 19, 2020

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Husk at vi har definert følgende avbildinger mellom vektorrom av k-former:

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Husk at vi har definert følgende avbildinger mellom vektorrom av k-former:

- $i : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ definert ved

$$i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V),$$

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Husk at vi har definert følgende avbildinger mellom vektorrom av k-former:

- $i : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ definert ved
$$i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V),$$
- $j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V)$ definert ved
$$j(\alpha, \beta) = \beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U\cap V},$$

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Husk at vi har definert følgende avbildinger mellom vektorrom av k-former:

- $i : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ definert ved

$$i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V),$$

- $j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V)$ definert ved

$$j(\alpha, \beta) = \beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U\cap V},$$

- Siden d kommuterer med resriksjon, kommuterer d med i og j, så disse er kokjedeavbildinger.

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Husk at vi har definert følgende avbildinger mellom vektorrom av k-former:

- $i : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ definert ved
$$i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V),$$
- $j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V)$ definert ved
$$j(\alpha, \beta) = \beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U\cap V},$$
- Siden d kommuterer med resriksjon, kommuterer d med i og j, så disse er kokjedeavbildinger.

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv.

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$.

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$. Gitt $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ har vi nå at $\omega_U = -\rho_V \cdot \omega \in \Omega^k(U)$ og $\omega_V = \rho_U \cdot \omega \in \Omega^k(V)$.

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$. Gitt $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ har vi nå at $\omega_U = -\rho_V \cdot \omega \in \Omega^k(U)$ og $\omega_V = \rho_U \cdot \omega \in \Omega^k(V)$. Vi ser nå på $j(\omega_U, \omega_V)$.

$$\omega_V - \omega_U$$

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$. Gitt $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ har vi nå at $\omega_U = -\rho_V \cdot \omega \in \Omega^k(U)$ og $\omega_V = \rho_U \cdot \omega \in \Omega^k(V)$. Vi ser nå på $j(\omega_U, \omega_V)$.

$$\omega_V - \omega_U = \rho_U \cdot \omega - (-\rho_V \cdot \omega)$$

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$. Gitt $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ har vi nå at $\omega_U = -\rho_V \cdot \omega \in \Omega^k(U)$ og $\omega_V = \rho_U \cdot \omega \in \Omega^k(V)$. Vi ser nå på $j(\omega_U, \omega_V)$.

$$\omega_V - \omega_U = \rho_U \cdot \omega - (-\rho_V \cdot \omega) = (\rho_U + \rho_V) \cdot \omega$$

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$. Gitt $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ har vi nå at $\omega_U = -\rho_V \cdot \omega \in \Omega^k(U)$ og $\omega_V = \rho_U \cdot \omega \in \Omega^k(V)$. Vi ser nå på $j(\omega_U, \omega_V)$.

$$\omega_V - \omega_U = \rho_U \cdot \omega - (-\rho_V \cdot \omega) = (\rho_U + \rho_V) \cdot \omega = \omega.$$

$\square$

26.1 Mayer-Vietoris-sekvensen

Proposition

26.2 *Med notasjon som over har vi at*

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

er kort eksakt for $k \geq 0$.

Bevis: Det eneste som krever litt er å vise at j er surjektiv. La $\{\rho_U, \rho_V\}$ være en partisjon av enheten med hensyn på $\{U, V\}$. Gitt $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ har vi nå at $\omega_U = -\rho_V \cdot \omega \in \Omega^k(U)$ og $\omega_V = \rho_U \cdot \omega \in \Omega^k(V)$. Vi ser nå på $j(\omega_U, \omega_V)$.

$$\omega_V - \omega_U = \rho_U \cdot \omega - (-\rho_V \cdot \omega) = (\rho_U + \rho_V) \cdot \omega = \omega.$$

□

Proposition

26.4 *Variant av M-V - selvstudie.*

De Rham-kohomologi for sfærer.

De Rham-kohomologi for sfærer.

Vi dekker S^2 med med åpne mengder U, V sånn at $U \approx V \approx D^2$, $U \cap V \approx S^1 \times (0,1)$.

De Rham-kohomologi for sfærer.

Vi dekker S^2 med med åpne mengder U, V sånn at $U \approx V \approx D^2$, $U \cap V \approx S^1 \times (0,1)$. Vi ser på

$$\begin{aligned}
&\to H^2(S^2) \to H^2(U) \oplus H^2(V) \to \\
&\to H^1(S^2) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to \\
0 &\to H^0(S^2) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to
\end{aligned}$$

De Rham-kohomologi for sfærer.

Vi dekker S^2 med med åpne mengder U, V sånn at $U \approx V \approx D^2$, $U \cap V \approx S^1 \times (0,1)$. Vi ser på

$$\begin{aligned} &\to H^2(S^2) \to H^2(U) \oplus H^2(V) \to \\ &\to H^1(S^2) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to \\ 0 &\to H^0(S^2) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to \end{aligned}$$

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to H^1(S^2) \to 0 \ \to \mathbb{R} \to H^2(S^2) \to 0.$$