Homotopi-invarians

"An Introduction to Manifolds", Kapittel 27 og 29.

Erlend Fornæss Wold

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo

May 11, 2020

27.1 og 27.2 Glatte homotopier og homotopiekvivalens

27.1 og 27.2 Glatte homotopier og homotopiekvivalens

Definition

La $f, g : M \to N$ være glatte avbildinger mellom glatte mangfoldigheter M og N.

27.1 og 27.2 Glatte homotopier og homotopiekvivalens

Definition

La $f, g : M \to N$ være glatte avbildinger mellom glatte mangfoldigheter M og N. Vi sier at f og g er (glatt) homotope dersom det fins en glatt avbilding $F : M \times I \to N$ slik at $F(x, 0) = f$ og $F(x, 1) = g$.

27.1 og 27.2 Glatte homotopier og homotopiekvivalens

Definition

La $f, g : M \to N$ være glatte avbildinger mellom glatte mangfoldigheter M og N. Vi sier at f og g er (glatt) homotope dersom det fins en glatt avbilding $F : M \times I \to N$ slik at $F(x, 0) = f$ og $F(x, 1) = g$.

Definition

Vi sier at en glatt avbilding $f : M \to N$ er en homotopiekvivalens dersom det eksisterer en glatt avbilding $g : N \to M$ slik at bådet $g \circ f$ og $f \circ g$ er homotope med identiteten.

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

La $f : M \to N$ være en glatt avbilding.

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

La $f : M \to N$ være en glatt avbilding. Husk at f induserer en avbilding

$$f^* : H^k(N) \to H^k(M)$$

på kohomologien (Vi har også skrevet $f^\sharp = f^*$).

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

La $f : M \to N$ være en glatt avbilding. Husk at f induserer en avbilding

$$f^* : H^k(N) \to H^k(M)$$

på kohomologien (Vi har også skrevet $f^\sharp = f^*$).

Theorem

27.10 *Homotope avbildinger $f_0, f_1 : M \to N$ induserer samme avbilding på kohomologien, det vil si*

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

La $f : M \to N$ være en glatt avbilding. Husk at f induserer en avbilding

$$f^* : H^k(N) \to H^k(M)$$

på kohomologien (Vi har også skrevet $f^\sharp = f^*$).

Theorem

27.10 *Homotope avbildinger $f_0, f_1 : M \to N$ induserer samme avbilding på kohomologien, det vil si*

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Corollary

(A) *Anta at $f : M \to N$ er en homotopi ekvivalens. Da er $f^\sharp : H^*(N) \to H^*(M)$ is isomorfi.*

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

La $f : M \to N$ være en glatt avbilding. Husk at f induserer en avbilding

$$f^* : H^k(N) \to H^k(M)$$

på kohomologien (Vi har også skrevet $f^\sharp = f^*$).

Theorem

27.10 *Homotope avbildinger $f_0, f_1 : M \to N$ induserer samme avbilding på kohomologien, det vil si*

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Corollary

(A) *Anta at $f : M \to N$ er en homotopi ekvivalens. Da er $f^\sharp : H^*(N) \to H^*(M)$ is isomorfi.*

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

Corollary

(Poincaré Lemma) *Anta at* $f : M \times [0,1] \to M$ *er en homotopi sånn at* $f_0 = \mathrm{Id}$ *og* $f_1 \equiv p \in M$ *(*f_1 *er konstant).*

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

Corollary

(Poincaré Lemma) *Anta at* $f : M \times [0,1] \to M$ *er en homotopi sånn at* $f_0 = \mathrm{Id}$ *og* $f_1 \equiv p \in M$ *(*f_1 *er konstant). Da har vi*

$$H^k(M) = 0 \text{ for } k \geq 1.$$

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

Corollary

(Poincaré Lemma) *Anta at $f : M \times [0,1] \to M$ er en homotopi sånn at $f_0 = \mathrm{Id}$ og $f_1 \equiv p \in M$ (f_1 er konstant). Da har vi*

$$H^k(M) = 0 \text{ for } k \geq 1.$$

Example

$H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ for $k \geq 1$.

27.4 og 29 Homotopiaksiomet for de Rham-kohomologi

Corollary

(Poincaré Lemma) *Anta at* $f : M \times [0,1] \to M$ *er en homotopi sånn at* $f_0 = \mathrm{Id}$ *og* $f_1 \equiv p \in M$ *(*f_1 *er konstant). Da har vi*

$$H^k(M) = 0 \textit{ for } k \geq 1.$$

Example

$H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ for $k \geq 1$. Dersom M er en mangfoldighet, og dersom $p \in M$ er et punkt, så fins et koordinatkart (U_α, ϕ_α) om p slik at $H^k(U_\alpha) = 0$ for alle $k \geq 1$.

Bevis for Korollar **(A)**

Bevis for Korollar **(A)**

Vi har at $g \circ f$ er homotop med identiteten, så $(g \circ f)^\sharp = \mathrm{Id}$.

Bevis for Korollar **(A)**

Vi har at $g \circ f$ er homotop med identiteten, så $(g \circ f)^\sharp = \mathrm{Id}$. Men $f^\sharp \circ g^\sharp = (g \circ f)^\sharp = \mathrm{Id}$, så $g^\sharp$ har en venstreinvers.

Bevis for Korollar **(A)**

Vi har at $g \circ f$ er homotop med identiteten, så $(g \circ f)^\sharp = \mathrm{Id}$. Men $f^\sharp \circ g^\sharp = (g \circ f)^\sharp = \mathrm{Id}$, så $g^\sharp$ har en venstreinvers. Tilsvarende har $f^\sharp$ en venstreinvers. $\square$

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$,

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Vi gjør en forenkling.

- For $t \in [0,1]$ lar vi $i_t : M \to M \times [0,1]$ betegne avbildingen $i_t(x) = (x,t)$.

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Vi gjør en forenkling.

- For $t \in [0,1]$ lar vi $i_t : M \to M \times [0,1]$ betegne avbildingen $i_t(x) = (x,t)$.
- Da har vi $f_0 = f \circ i_0$ og $f_1 = f \circ i_1$.

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0, 1] \to N$ er glatt, $t \in [0, 1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Vi gjør en forenkling.

- For $t \in [0, 1]$ lar vi $i_t : M \to M \times [0, 1]$ betegne avbildingen $i_t(x) = (x, t)$.
- Da har vi $f_0 = f \circ i_0$ og $f_1 = f \circ i_1$.
- Så vi får at $f_0^\sharp = i_0^\sharp \circ f^\sharp$ og $f_1^\sharp = i_1^\sharp \circ f^\sharp$.

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Vi gjør en forenkling.

- For $t \in [0,1]$ lar vi $i_t : M \to M \times [0,1]$ betegne avbildingen $i_t(x) = (x,t)$.
- Da har vi $f_0 = f \circ i_0$ og $f_1 = f \circ i_1$.
- Så vi får at $f_0^\sharp = i_0^\sharp \circ f^\sharp$ og $f_1^\sharp = i_1^\sharp \circ f^\sharp$.
- Så det holder å vise at $i_0^\sharp = i_1^\sharp$.

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Vi gjør en forenkling.

- For $t \in [0,1]$ lar vi $i_t : M \to M \times [0,1]$ betegne avbildingen $i_t(x) = (x,t)$.
- Da har vi $f_0 = f \circ i_0$ og $f_1 = f \circ i_1$.
- Så vi får at $f_0^\sharp = i_0^\sharp \circ f^\sharp$ og $f_1^\sharp = i_1^\sharp \circ f^\sharp$.
- Så det holder å vise at $i_0^\sharp = i_1^\sharp$.
- Så det holder å vise at $i_1^*\omega - i_0^*\omega$ er eksakt for enhver lukket form ω.

Bevis for Teorem 27.10 (i $\mathbb{R}^n$)

Vi skal altså vise at dersom $f : M \times [0,1] \to N$ er glatt, $t \in [0,1]$, så er

$$f_0^\sharp = f_1^\sharp : H^*(N) \to H^*(M).$$

Vi gjør en forenkling.

- For $t \in [0,1]$ lar vi $i_t : M \to M \times [0,1]$ betegne avbildingen $i_t(x) = (x,t)$.
- Da har vi $f_0 = f \circ i_0$ og $f_1 = f \circ i_1$.
- Så vi får at $f_0^\sharp = i_0^\sharp \circ f^\sharp$ og $f_1^\sharp = i_1^\sharp \circ f^\sharp$.
- Så det holder å vise at $i_0^\sharp = i_1^\sharp$.
- Så det holder å vise at $i_1^*\omega - i_0^*\omega$ er eksakt for enhver lukket form ω.

Theorem

(C) *Det fins en lineær avbilding $K : \Omega^*(M \times I) \to \Omega^{*-1}(M)$ slik at*

$$dK + Kd = i_1^* - i_0^*.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Så i stedet for en mangfoldighet M ser vi på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$.

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Så i stedet for en mangfoldighet M ser vi på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$.

Vi ser først hva som skjer med 1-former, det vil si vi ser på $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)dx_j + f(x,t)dt.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Så i stedet for en mangfoldighet M ser vi på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$.

Vi ser først hva som skjer med 1-former, det vil si vi ser på $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)dx_j + f(x,t)dt.$$

Da definerer vi

$$K\omega(x) := \int_0^1 f(x,t)dt.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Så i stedet for en mangfoldighet M ser vi på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$.

Vi ser først hva som skjer med 1-former, det vil si vi ser på $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\omega(x, t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, t)dx_j + f(x, t)dt.$$

Da definerer vi

$$K\omega(x) := \int_0^1 f(x, t)dt.$$

Vi har foreløpig ikke definert $K : \Omega^2(U) \to \Omega^1(U)$, så vi antar at $d\omega = 0$, og viser at $dK\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega$.

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Så i stedet for en mangfoldighet M ser vi på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$.

Vi ser først hva som skjer med 1-former, det vil si vi ser på $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\omega(x, t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, t)dx_j + f(x, t)dt.$$

Da definerer vi

$$K\omega(x) := \int_0^1 f(x, t)dt.$$

Vi har foreløpig ikke definert $K : \Omega^2(U) \to \Omega^1(U)$, så vi antar at $d\omega = 0$, og viser at $dK\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega$. Merk at

$$i_t^*\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, t)dx_j.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Det vil si at

$$a_j(x,1) - a_j(x,0)$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Det vil si at

$$a_j(x,1) - a_j(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t)dt$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Det vil si at

$$a_j(x,1) - a_j(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Det vil si at

$$a_j(x,1) - a_j(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) dt = \frac{\partial}{\partial x_j} K\omega(x).$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Det vil si at

$$a_j(x,1) - a_j(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x_j} K\omega(x).$$

Det vil si

$$dK\omega(x)$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak).

Vi har at

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial t} dt \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dt = 0.$$

Det vil si at

$$\frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t).$$

Det vil si at

$$a_j(x,1) - a_j(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial t}(x,t)dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x_j} K\omega(x).$$

Det vil si

$$dK\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j(x,1) - a_j(x,0))dx_j = i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x).$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Ser nå på det generelle tilfellet, og ser på $\omega \in \Omega^k(U)$ gitt ved

$$\omega(x,t) = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} a_I(x,t)dx_I$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Ser nå på det generelle tilfellet, og ser på $\omega \in \Omega^k(U)$ gitt ved

$$\omega(x,t) = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} a_I(x,t) dx_I + dt \wedge \sum_{J \in \mathcal{J}_{k-1,n}} b_J(x,t) dx_J,$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Ser nå på det generelle tilfellet, og ser på $\omega \in \Omega^k(U)$ gitt ved

$$\omega(x,t) = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} a_I(x,t)dx_I + dt \wedge \sum_{J \in \mathcal{J}_{k-1,n}} b_J(x,t)dx_J,$$

og vi skriver

$$\eta(x,t) := \sum_{J \in \mathcal{J}_{k-1,n}} b_J(x,t)dx_J,$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Ser nå på det generelle tilfellet, og ser på $\omega \in \Omega^k(U)$ gitt ved

$$\omega(x,t) = \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} a_I(x,t)dx_I + dt \wedge \sum_{J \in \mathcal{J}_{k-1,n}} b_J(x,t)dx_J,$$

og vi skriver

$$\eta(x,t) := \sum_{J \in \mathcal{J}_{k-1,n}} b_J(x,t)dx_J,$$

og videre

$$K\omega(x) := \int_0^1 \eta(x,t)dt.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$,

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x, t) = a(x, t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x, t) = dt \wedge a(x, t)dx_I$.

Tilfelle (i):

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Tilfelle (i): Merk først at $K\omega = 0$.

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Tilfelle (i): Merk først at $K\omega = 0$. Vi har at

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Tilfelle (i): Merk først at $K\omega = 0$. Vi har at

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I + \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_I.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Tilfelle (i): Merk først at $K\omega = 0$. Vi har at

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I + \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_I.$$

Så $\eta(x,t) = \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dx_I$, og

$$Kd\omega(x)$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Tilfelle (i): Merk først at $K\omega = 0$. Vi har at

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I + \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_I.$$

Så $\eta(x,t) = \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dx_I$, og

$$Kd\omega(x) = (\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt)dx_I$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Vi må nå vise at

$$dK\omega + Kd\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

Ved linearitet holder det å vise det i to tilfeller

(i) $\omega(x,t) = a(x,t)dx_I$, og

(ii) $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Tilfelle (i): Merk først at $K\omega = 0$. Vi har at

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I + \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_I.$$

Så $\eta(x,t) = \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dx_I$, og

$$Kd\omega(x) = (\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt)dx_I = (a(x,1) - a(x,0))dx_I.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$.

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$. Merk først at $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$.

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$. Merk først at $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$. Vi har at

$$K\omega(x) = (\int_0^1 a(x,t))dx_I$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$. Merk først at $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$. Vi har at

$$K\omega(x) = (\int_0^1 a(x,t))dx_I$$

Så

$$dK\omega(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$. Merk først at $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$. Vi har at

$$K\omega(x) = (\int_0^1 a(x,t))dx_I$$

Så

$$dK\omega(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.$$

På den annen side har vi

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dt \wedge dx_I$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$. Merk først at $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$. Vi har at

$$K\omega(x) = (\int_0^1 a(x,t))dx_I$$

Så

$$dK\omega(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.$$

På den annen side har vi

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dt \wedge dx_I =$$

$$-dt \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.$$

Bevis for Teorem **(C)** i $\mathbb{R}^n$ (følger Spivak)

Tilfelle (ii): $\omega(x,t) = dt \wedge a(x,t)dx_I$. Merk først at $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$. Vi har at

$$K\omega(x) = (\int_0^1 a(x,t))dx_I$$

Så

$$dK\omega(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.$$

På den annen side har vi

$$d\omega(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dt \wedge dx_I =$$

$$-dt \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.$$

$$Kd\omega(x) = -\int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x,t)dx_j \wedge dx_I.\Box$$