Oppgave 2.1.15 (Hatcher)

La $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\varepsilon} E$ være en eksakt sekvens. Vi skal vise at

$C = \{0\} \iff \alpha$ er surjektiv og ε er injektiv.

Anta α er surjektiv og ε er injektiv.
Da er $\ker \varepsilon = \{0\} = \gamma(C)$ og $\alpha(A) = B = \ker \beta$
Så $\beta(B) = \{0\} = \ker \gamma$. Så γ er injektiv og siden $\gamma(C) = \{0\}$ er $C = \{0\}$.

Anta nå $C = \{0\}$. Da er $\gamma(C) = \{0\} = \ker \varepsilon$
Så ε er injektiv. Videre er $\beta(B) \subset C = \{0\}$
Så $\beta(B) = \{0\}$ dvs. $\ker \beta = B = \alpha(A)$.
Så α er surjektiv.

2.1.16

Vi har $C_1(X,A) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X,A) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$.

Så $H_0(X,A) = C_0(X,A) / \operatorname{im}\partial_1$

a)

Anta at om X_α er veikomponent til X

Så er $X_\alpha \cap A \neq \emptyset$ for alle slike X_α.

La $c = \sum n_i \sigma_i \in C_0(X,A)$

Vi identifiserer σ_i med den $\sigma_i : \{1\} \to X$, La X_{α_i} være veikomponent punkt $\sigma_i(1)$. La X_{α_i}

slik at $\sigma_i \in X_{\alpha_i}$. La $a_i \in X_{\alpha_i} \cap A$

La $\delta_i : I \to X_{\alpha_i}$ være vei fra a_i til σ_i

Vi kan identifisere δ_i med 1-simpleks

slik at $\partial \delta_i = \sigma_i - a_i$, dvs. $\sigma_i = \partial\delta_i + a_i$

Så lar vi $[\sigma_i], [a_i]$ betegne homologi klassen til σ_i, a_i i $H_0(X,A)$ har vi da

$[\sigma_i] = [a_i] = 0$. Så $[c] = \sum n_i [\sigma_i] = 0$

dvs. $H_0(X,A) = 0$.

La oss nå anta at $H_0(X, A) = 0$.

I $C_0(X)$ kan hvert punkt $x \in X$ identifiseres med et 0-simpleks. La $x \in X$. Da er altså

$0 = [x] \in H_0(X, A)$ som betyr at vi kan skrive

$$x = \sum_i n_i a_i + \sum_j m_j \partial \sigma_j$$

der a_i er 0-simplekser i A og σ_j er 1-simplekser i X. Når er $\sigma_j : \Delta^1 \to X$ og $\partial \sigma_j = \sigma_j(v_1) - \sigma_j(v_0)$ så

$$x = \sum_i n_i a_i + \sum_j m_j (\sigma_j(v_1) - \sigma_j(v_0)) \quad (*)$$

Summen over er en linearkombinasjon av 0-simplekser, eller punkter i X. En kan rearrangere summen og skrive den som en sum av delsummer der det i hver delsum er punkter fra samme veikomponent i X. Tar en hver slik delsum og ser på de av summene som har punkter som ligger i andre veikomponenter enn den x tilhører må alle disse kanselere. Videre er det slik at punktene $\sigma_j(v_1), \sigma_j(v_0)$ alltid er i samme veikomponent.

Vi kan derfor skrive

$$x = \sum_i n_i a_i + \sum_j m_j (\sigma_j(v_1) - \sigma_j(v_0))$$

der vi kan anta at a_i er punkter i samme veikomponent som x og σ_j er et 1-simpleks i samme veikomponent som x.

Vi har nå definert en homomorfi

$\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$, $\varepsilon(\sum_\ell k_\ell x_\ell) = \sum_\ell k_\ell$

(se Hatcher)

Vi har da

$$1 = \varepsilon(x) = \sum_i n_i + \sum_j (m_j - m_j) = \sum_i n_i$$

Dette betyr at $n_i \neq 0$ for minst en i dvs. det fins $a_i \in A$ i samme veikomponent som x.

b) Vi skal så vise at $H_1(X,A)=0$ hvis og bare hvis $H_1(A)\to H_1(X)$ er surjektiv og hver veikomponent av X inneholder høyst én veikomponent av A.

Vi viser først at det siste er ekvivalent med at $H_0(A)\to H_0(X)$ er injektiv.

La $\{A_\beta \mid \beta\in B\}$ og $\{X_\alpha \mid \alpha\in \mathcal{A}\}$ være veikomponenter til henholdsvis A og X.

Vi har en isomorfi $H_0(A)\overset{f}{\cong}\bigoplus_{\beta\in B}\mathbb{Z}_\beta$

der $\mathbb{Z}_\beta$ er en kopi av $\mathbb{Z}$ og en tilsvarende isomorfi $H_0(X)\overset{g}{\cong}\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{Z}_\alpha$.

Om $c=\sum n_i a_i\in C_0(A_\beta)$ (der $a_i\in A_\beta$ identifiseres med 0-simpleks) og $[c]$ er homologiklassen til c er $f([c])=\sum n_i\in\mathbb{Z}_\beta$.

g er definert på samme måte.

For hver β fins $\alpha(\beta)$ slik at $A_\beta \subset X_{\alpha(\beta)}$

Hvis $c \in C_0(A_\beta)$, $c = \sum_i n_i a_i$ og $i : A \to X$

er inklusjon er $g \circ i_*([c]) = \sum_i n_i \in \mathbb{Z}_{\alpha(\beta)}$

Dvs. i_* induserer avbildningen

$$\bigoplus_{\beta \in B} \mathbb{Z}_\beta \xrightarrow{h} \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}_\alpha$$

gitt $h(\bigoplus_{\beta \in B} n_\beta) = \bigoplus_{\alpha \in A} m_\alpha$ der $m_\alpha = \sum_{\alpha(\beta)=\alpha} n_\beta$

det er klart at denne avbildningen er injektiv hvis og bare hvis $\#\{\beta \mid \alpha(\beta) = \alpha\} \leq 1$ for hver α.

dvs. hver vei komponent av X inneholder høyst en vei komponent av A.

La oss nå anta at $H_1(A) \to H_1(X)$ er surjektiv og hver vei komponent av X inneholder høyst en vei komponent av A. ~~Fra~~ Da er $H_0(A) \to H_0(X)$ injektiv og fra

$$H_1(A) \to H_1(X) \to H_1(X,A) \to H_0(A) \to H_0(X)$$

og 2.1.15 får vi $H_1(X,A) = 0$

Omvendt om $H_1(X,A) = 0$ gir 2.1.15 at $H_1(A) \to H_1(X)$ er surjektiv og $H_0(A) \to H_0(X)$ er injektiv, så hver veikomponent av X inneholder høyst én fra A.

2.1.17

a) Skal finne $H_n(X,A)$ der $X = S^2$ eller $X = S^1 \times S^1$ og $A \subset X$, $\# A < \infty$.

La oss se på følgen

$$\to \tilde{H}_n(A) \to \tilde{H}_n(X) \to H_n(X,A) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \to$$

For $n > 1$ er $\tilde{H}_n(A) = \tilde{H}_{n-1}(A) = 0$

dvs. $\tilde{H}_n(X) = H_n(X) \approx H_n(X,A)$

For $X = S^2$ får vi da $H_n(X,A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=2 \\ 0 & n>2 \end{cases}$

Fra eksempel 2.3 side 106 og teorem 2.27 (som vi forutsetter kjent) har vi med $X = S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$ også

$$H_n(X,A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=2 \\ 0 & n>2 \end{cases}$$

For $X = S^2$ og $n = 1$ får vi nå

$$0 = \tilde{H}_1(S^2) \to H_1(S^2, A) \to \tilde{H}_0(A) \approx \mathbb{Z}^{\# A-1} \to \tilde{H}_0(S^2) = 0$$

som gir $H_1(S^2, A) \approx \mathbb{Z}^{(\# A)-1}$ og for $n=0$

får vi $\quad 0 = \tilde{H}_0(S^2) \to H_0(S^2, A) \to 0$

dvs. $H_0(S^2, A) = 0$

For $X = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ er $H_1(X) = \tilde{H}_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

og $\tilde{H}_0(X) = 0$. Vi har videre $\tilde{H}_1(A) = 0$

så vi får:

$$0 = \cancel{\tilde{H}_1(A) \to \tilde{H}_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \tilde{H}_1(\ldots}$$

$$0 \to \tilde{H}_1(A) \to H_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(X, A)$$

$$\to \tilde{H}_0(A) = \mathbb{Z}^{\#A-1} \to \tilde{H}_0(X) = 0$$

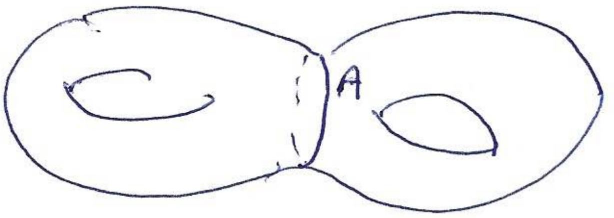
Dvs. vi får eksakt sekvens:

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(X, A) \to \mathbb{Z}^{\#A-1} \to 0$$

Siden dette er en kort eksakt sekvens der $\mathbb{Z}^{\#A-1}$ er fri, vil sekvensen splitte og vi får $H_1(X, A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\#A-1}$

$= \mathbb{Z}^{\#A+1}$ (dvs. direkte sum av $\#A+1$ ~~komponent~~ kopier av $\mathbb{Z}$)

b) La oss betrakte

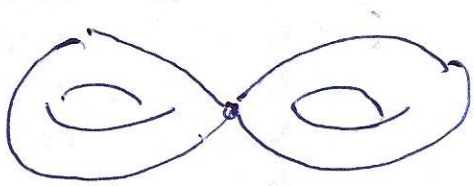


X

Det er opplagt at (X, A) er et „godt par."

Dette betyr at (Prop 2.22)

$$H_n(X, A) \approx \tilde{H}_n(X/A)$$

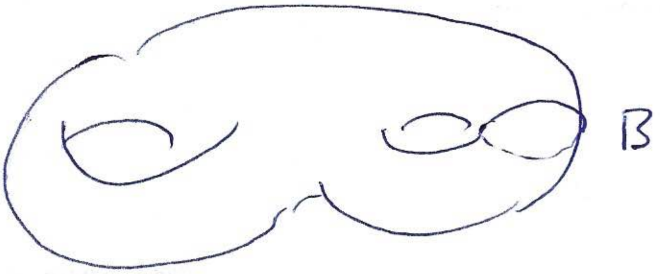
Men $X/A =$  $= T^2 \vee T^2$

og fra Korollar 2.25 har vi

$$\tilde{H}_n(X/A) = \tilde{H}_n(T^2 \vee T^2) \approx \tilde{H}_n(T^2) \oplus \tilde{H}_n(T^2)$$

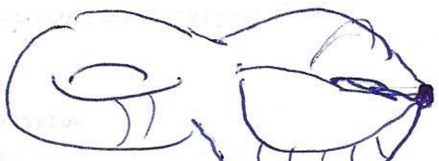
$$= \begin{cases} 0 & n > 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & , n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

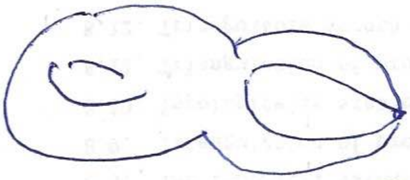
La oss nå se på (X,B)

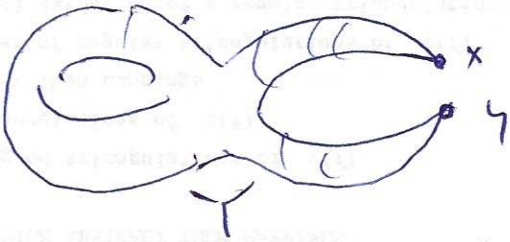


Igjen er (X,B) et godt par.

Så $H_n(X,B) \cong \tilde{H}_n(X/B)$

Nå er $X/B =$ 

og  er igjen et kvotientrom

oppnådd fra 

ved å identifisere punktene x og y

Merk at $(Y,\{x,y\})$ er også et godt par.

Så $H_n(Y,\{x,y\}) \cong \tilde{H}_n(X/B)$

Men Y er bare en torus $\mathbb{T}^2$ og $\{x,y\}$ er to punkter så $H_n(Y,\{x,y\})$ er regnet ut i a)

og da får vi $\tilde{H}_n(X/B) = H_n(Y,\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & n>2 \\ \mathbb{Z} & n=2 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & n=3 \\ 0 & n=0 \end{cases}$