Cellulær rand formel

$$d_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

$H_n(X^n, X^{n-1})$ er frigruppe med basis $\{e_\alpha^n\}$ n-celler

$H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ —— " —————— $\{e_\beta^{n-1}\}$ $n-1$-celler,

Tilfelle $n=1$

1-celle er avbildning $\Delta^1 \xrightarrow{\sigma} X^0$, med $\sigma(\partial\Delta^1) \subset X^0$.

$d_1 = \partial_1 : H_1(X^1, X^0) \to H_0(X^0) = H_0(X^0, X^{-1} = \emptyset)$

~~og~~ Hvis X har bare en 0-celle $\overset{x_0}{\text{"}}$ Så $d_1 = 0$

Siden $\partial\sigma = x_0 - x_0 = 0$

La $n > 0$.

La e_α^n være n celle. Da har vi karakteristisk avbildning $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \to X^n$

og avbildning $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n = S_\alpha^{n-1} \to X^{n-1}$

La e_β^{n-1} være $n-1$ celle. Vi har avbildning

$$X^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} X^{n-1} / X^{n-1} - e_\beta^{n-1} \approx S_\beta^{n-1}$$

Så vi ~~får~~ avbildning

$$S_\alpha^{n-1} \xrightarrow[\Delta_{\alpha\beta}]{} S_\beta^{n-1}, \text{ og denne har grad}$$

betegnet med $d_{\alpha\beta}$

Cellulær rand formel

Identifiser n-cellene $\{e_\alpha^n\}$ og $n-1$-cellene $\{e_\beta^{n-1}\}$ med basisen for

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \quad \text{og} \quad \cancel{H_n(X} \; H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

da er $$d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1} .$$

For å innse dette betrakt:

$\Phi_\alpha : D_\alpha^n \to X^n$ karakteristisk avbildning

med $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n = S_\alpha^{n-1} \to X^{n-1}$ (og $e_\alpha^n = D_\alpha^n - S_\alpha^{n-1}$)

Vi har da

$$\begin{tikzcd}
H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \arrow[r, "\partial"', "\approx"] \arrow[d, "\Phi_{\alpha *}"] & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) \arrow[r, "\Delta_{\alpha\beta *}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha *}"] & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"'] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \arrow[u, "q_{\beta *}"'] \arrow[d, "\approx"] \\
& H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r, "\approx"] & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2})
\end{tikzcd}$$

Vi har videre $q : X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2} \; (\approx \bigvee_\beta S_\beta^{n-1})$

Videre er $e^{n-1}_\beta \subset X^{n-1}/X^{n-2}$ for hver β.

og vi kan danne $X^{n-1}/X^{n-2} \big/ \left(X^{n-1}/X^{n-2} - e^{n-1}_\beta\right)$

$\approx S^{n-1}_\beta = D^{n-1}_\beta / \partial D^{n-1}_\beta$, og $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \to S^{n-1}_\beta$

$\Delta_{\alpha\beta} : \partial D^n_\alpha \to S^{n-1}_\beta$, $\Delta_{\alpha\beta} = q_\beta q \varphi_\alpha$

Diagrammet er kommutativt.

—

Betrakt $H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$

Kan identifisere D^n_α med en relativ sykel og ~~homologiklassen~~ $[D^n_\alpha]$ en generator i ~~B~~ $H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$

Da vil $\Phi_{\alpha *}([D^n_\alpha]) \in H_n(X^n, X^{n-1})$ svare til en generator i $H_n(X^n, X^{n-1})$

$\approx H_n(X^n/X^{n-1}) = \cancel{\bigvee_{\alpha'} S^n_{\alpha'}}$ ~~svarer~~ $H_n(\bigvee_{\alpha'} S^n_{\alpha'})$

$\approx \bigoplus_{\alpha'} H_n(S^n_{\alpha'})$ svarende til en generator i $H_n(S^n_\alpha)$

dvs. e^n_α generator vi kaller e^n_α

Vi ~~får $d_n(e^n_\alpha) = j_{n}$ ∂_n (I~~

Vi får $d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1}\partial_n(e_\alpha^n)$

$= j_{n-1}\partial_n \Phi_{\alpha *}[D_\alpha^n] = j_{n-1}\varphi_{\alpha *}\partial[D_\alpha^n]$

Lar vi nå på samme måte $\{e_\beta^{n-1}\}$ svare til generatorer for $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$

~~dvs.~~ får vi $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \simeq \bigoplus_\beta \mathbb{Z}_\beta$, $\mathbb{Z}_\beta \simeq \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1})$

$d_n(e_\alpha^n) = \bigoplus_\beta m_\beta$, og $m_\beta = q_{\beta *}(d_n(e_\alpha^n))$

~~$m_\beta = q_{\beta *}(e_\alpha^n)$~~ (via isomorfiene

$H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \simeq H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2})$

$\simeq H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$

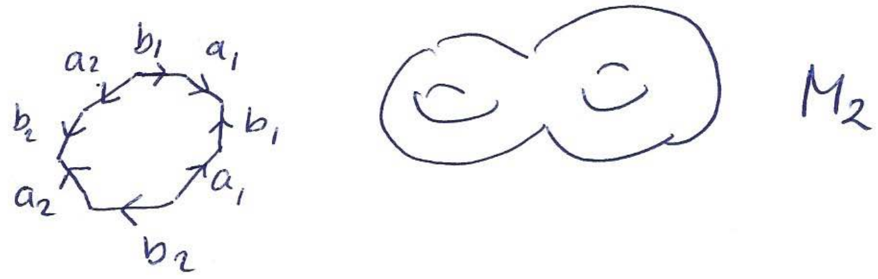
Da ser vi,

$q_{\beta *}(d_n(e_\alpha^n)) = q_{\beta *}(j_{n-1}\varphi_{\alpha *}\partial[D_\alpha^n])$

$= q_{\beta *}(q_* \varphi_{\alpha *}\partial[D_\alpha^n])$

$= \Delta_{\alpha\beta *}(\partial D_\alpha^n) = \deg \Delta_{\alpha\beta}$

Eksempel



M_g flate av genus g.

Har én 0-celle, $2g$ 1-celler og én 2-celle.

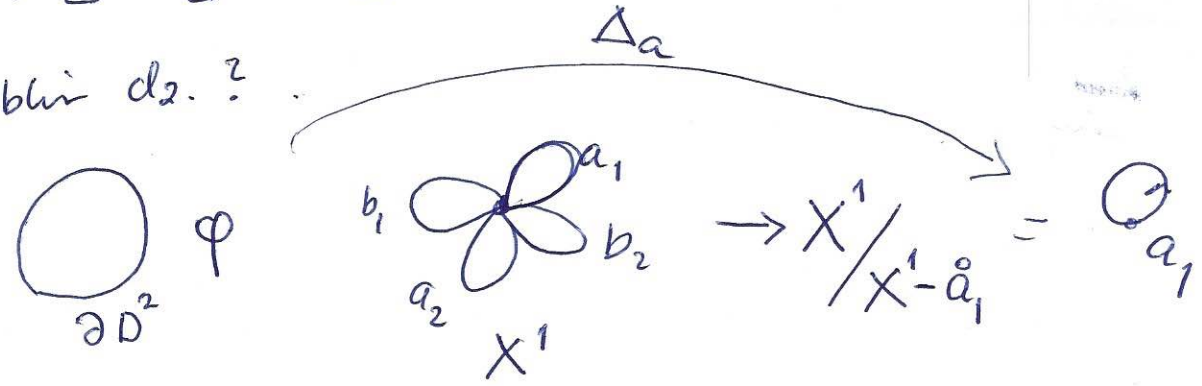
2 cellen festes ~~av~~ ved $[a_1, b_1] \quad [a_g, b_g]$

$$= a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

Får $H_0(X^0, \emptyset) = \mathbb{Z}$, $H_1(X^1, X^0) \approx \mathbb{Z}^{2g}$, $H_2(X^2, X^1) = \mathbb{Z}$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

Hva blir d_2 ?



Δ_a blir $a_1 a_1^{-1}$ som har grad 0

$d_2 = 0$. d_1 tar en homologiklasse svarende til en én celle f.eks. $\mathring{a}_1$ og sende til $\partial a_1 = e - e = 0$, e er 0-cellen

Dvs. $d_1 = 0$.

Cellulær homologi gir da

$$H_2(M_g)=\mathbb{Z}, \quad H_1(M_g)=\mathbb{Z}^{2g}, \quad H_0(M_g)=\mathbb{Z}.$$

Eksempel (2.4.2).

$\mathbb{R}P^n = X$, Her har $\mathbb{R}P^n$ én celle ~~av~~ i hver dimensjon. Så $X^k = \mathbb{R}P^k$.

og vi fester en k celle ved avbildning φ og vi har

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}$$

$\deg(q\circ\varphi) = \cancel{d_k}$ må regnes ut.

Sett $f = q\circ\varphi$. La U, V være øvre nedre halvkule $U\cup V = S^{k-1} - S^{k-2}$. La $y \in S^{k-1} - \varphi(S^{k-2})$

$f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$, $x_1 \in U$, $x_2 \in V$, $x_2 = -x_1$.

La $-\mathbb{1}$ være antipodal avbildning.

Da er $f|V = \cancel{f\circ(-\mathbb{1})}\ f|U \circ (-\mathbb{1}|V)$

Dette betyr at den lokale graden til f i x_2 er $(-1)^k$. lokale graden til f i x_1.

(Siden ~~antipodal grad~~ antipodal avbildningen har grad $(-1)^k$) og $f|U$, $f|V$ er homeomorfier så den lokale graden er $+1$ eller -1 i hvert punkt.

Så grad f blir summen $= \pm(1+(-1)^k) = \begin{cases} \pm 2 & \text{for } k \text{ like} \\ 0 & \text{for } k \text{ odde.} \end{cases}$

Vi kan godt anta graden er 2 for k like.
Vi får da et cellulært kompleks for $\mathbb{R}P^n$

$$0 \to \underset{\underset{H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})}{\shortparallel}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \cdots \cdots \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{for } n \text{ like}$$

$$0 \to \overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots\cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{for } n \text{ odde}$$

Dette betyr at

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,\ k=n,\ n \text{ odde} \\ \mathbb{Z}_2 & 0<k<n \quad k \text{ odde} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Merk at $\mathbb{R}P^n$ er orienterbar når n er odde
og ikke orienterbar når n er like
og $H_k(\mathbb{R}P^n)$ er da enten $\mathbb{Z}$ eller 0.
Dette er ~~i analogi~~ tilsvarende med hva vi vet
om de Rham cohomologi til orienterbare
ikke orienterbare differensiable mangfoldigheter.

Eulerkarakteristikk

Om G er en endelig generert abelsk gruppe kan G skrives som

$$G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \quad \oplus \mathbb{Z}_{q_n}$$

der $q_i = p_i^{n_i}$, p_i et primtall.

$\mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdot \quad \oplus \mathbb{Z}_{q_n} = T$ er torsjonen

og $\mathbb{Z}^n$ den frie delen og

$n = \operatorname{rank} G$.

Om X er et topologisk rom og $H_n(X)$ er endelig generert for hver n kalles $\operatorname{rank} H_n(X) = \beta_n$ for betti tallene.

La X være CW-kompleks med endelig mange celler. Vi definerer Eulerkarakteristikk

$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n$ der c_n er antall n-celler.

Teorem $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rank} H_n(X)$.

La A, B, C være endelig generete abelske grupper $0 \to A \to B \to C \to 0$ en kort eksakt sekvens.

Da er (opplagt) $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} C$

(Bevis: del ut med torsjonen så blir følgen split eksakt og alle grupper frie)

Bevis for teoremet

$0 \to C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \longrightarrow \qquad C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0$ kjedekompleks.

der C_i endelig generert abelsk.

$Z_n = \ker d_n$, $B_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$, $H_n = Z_n / B_n$

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$$

$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$$

korte eksakte. Dvs. $\operatorname{rank} C_n = \operatorname{rank} Z_n + \operatorname{rank} B_{n-1}$
$\operatorname{rank} Z_n = \operatorname{rank} B_n + \operatorname{rank} H_n$

dvs $\operatorname{rank} H_n = \operatorname{rank} Z_n - \operatorname{rank} B_n = \cancel{\operatorname{rank} B_{n-1} + \operatorname{rank}} C_n - \operatorname{rank} B_{n-1}$

$= \operatorname{rank} C_n - \operatorname{rank} B_{n-1} - \operatorname{rank} B_n$

Vi får da (med $B_{-1} = 0$) $\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \operatorname{rank} H_n$

$= \sum_{n=0}^{k} (-1)^n (\operatorname{rank} C_n - \operatorname{rank} B_{n-1} - \operatorname{rank} B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{rank} C_n$

(Merk $B_k = \operatorname{Im} d_{k+1} = 0$)

Sett nå $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$

så rank C_n = antall n-celler.

Og rank H_n = rank $H_n^{CW}(X)$ = rank $H_n(X)$.

Split Lemma

$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ kort eksakt

følge av abelske grupper.

Følgende er ekvivalent.

a) $\exists\, p : B \to A$ slik at $p \circ i = 1\!\!1_A$

b) $\exists\, s : C \to B$ —"— $j \circ s = 1\!\!1_B$

c) Det fins isomorfi $B \cong A \oplus C$

slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & B \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "\cong"] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\ & & A \oplus C \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

kommuterer

La nå $A \subset X$, $r : X \to A$ være en retraksjon

dvs. $r \circ i = 1\!\!1_A$. Vi har da

$$0 \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \to 0$$

kort eksakt følge. (i_* injektiv fordi $r \circ i = 1\!\!1_A$)

Merk videre at om

$c \in C_n(X)$ med $\partial c \in A$, så vil

$[c] \in H_n(X,A)$ bli avbildet på $[\partial c] \in H_{n-1}(A)$

i følgen $\quad H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$

men siden vi har $r : X \to A$ med $r|A = 1\!\!1_A$

har vi at ~~$i_* (r_* ($~~

$$\partial(\underbrace{i_\#(r_\#(c))}_{\in C_n(A)}) = \partial c \in C_{n-1}(A)$$

dvs $[\partial c] = 0$ i $H_{n-1}(A)$. Derfor er j_* surjektiv siden ∂ er 0 avbildning.

Følgen er nå split eksakt siden $r_* \circ i_* = (1\!\!1_A)_*$ og vi får

$$H_n(X) \approx H_n(A) \oplus H_n(X,A)$$

Mayer-Vitoris Sekvensen

La X være slik at $X = \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}\, B$

$A, B \subset X$

Da har vi en lang eksakt følge i homologi

$$\to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to$$

$$\to H_0(X) \to 0$$

Ta $C_n(A+B) \subset C_n(X)$

Vi $C_n(A+B)$ er endelig summer av simplekser

der hvert simpleks er enten i A eller i B

(noen kan være i $A \cap B$) dvs. ingen direkte sum)

Fra beviset for eksisjon vi

$i: C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ induserer ~~homologi~~

isomorfi i homologi. Vi har kort eksakt

følge av kjede komplekser

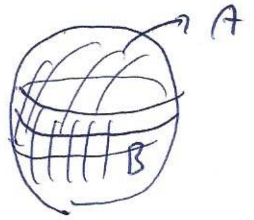
$$0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \to 0$$

$$\varphi(x) = (x, -x), \quad \psi(x, y) = x + y$$

(Klart at denne følgen er eksakt)

Dette gir nå lang eksakt følge i homologi som via isomorfien mellom homologien til $\{C_n(A+B)\}$ og $\{C_n(X)\}$ gir Mayer-Vietoris sekvensen.

~~At~~ Homologi av sfærer en gang til



S^n

La A, B være kule kalotter slik at $A \cap B$ blir et bånd rundt ekvator.

$$H_n(A) \approx H_n(B) \approx H_n\{*\} = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$H_n(A \cap B) \approx H_n(S^{n-1})$$

Dvs. vi får for $n > 1$

$$0 \to H_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \cancel{H_n(S} \; H_{n-1}(S^{n-1}) \to 0$$

dvs. $H_n(S^n) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \quad H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

og videre $0 \to H_1(S^1) \to H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_0(S^1) = \mathbb{Z} \to 0$

dvs. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_1(S^1) \oplus \mathbb{Z} \Rightarrow H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. (Cornwell)

Kan lage redusert versjon av Mayer-Vietoris.

Vi husker vi hadde $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$
$\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$.

Lager da kort eksakt følge av kjede komplekser som avsluttes med

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C_0(A\cap B) & \xrightarrow{\varphi} & C_0(A)\oplus C_0(B) & \xrightarrow{\psi} & C_0(A+B) & \to 0 \\ & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon\oplus\varepsilon & & \downarrow \varepsilon & \\ 0 \to & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Z} & \to 0 \end{array}$$

og følgen ender da med

$$\tilde{H}_0(A\cap B) \to \tilde{H}_0(A)\oplus\tilde{H}_0(B) \to \tilde{H}_0(X) \to 0$$