Hathcher 2.1.22

X endelig dimensjonalt CW kompleks.

a) Anta X har dimensjon n.

I denne oppgaven tar jeg Lemma 2.3.4 for gitt og da vet vi fra b) i dette lemma at $H_i(X) = H_i(X^n) = 0$ for $i > n$.

Fra den eksakte følgen til (X^n, X^{n-1}) får vi nå

$$\cancel{H_{n+1}(X^n)}$$

$$0 = H_n(X^{n-1}) \to H_n(X^n) \xrightarrow{j} H_n(X^n, X^{n-1})$$

dvs. $H_n(X^n) \xrightarrow{j} H_n(X^n, X^{n-1})$ er injektiv

Fra 2.3.4 a) vet vi at $H_n(X^n, X^{n-1})$ er fri

så $H_n(X^n)$ er isomorf med $\operatorname{im} j \subset H_n(X^n, X^{n-1})$.

og siden en undergruppe av en frigruppe er fri (det såkalte Nielsen-Schreier teoremet) er im j og derfor $H_n(X^n) = H_n(X)$ fri.

b) Anta nå X er CW-kompleks (~~ikke nødvendigvis endelig dimensjonalt~~ av endelig dimensjon) med ingen celler i dimensjon $n-1$ eller $n+1$.

Fra a) har vi sett at for hver n er $H_n(X^n) \xrightarrow{j} H_n(X^n, X^{n-1})$ injektiv

Hvis vi ikke har celler av dimensjon $n-1$, får vi fra 2.3.4 at

$H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = 0$ og derfor at $H_{n-1}(X^{n-1}) = 0$

Vi har da

$$H_n(X^{n-1}) = 0 \to H_n(X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}) = 0$$

dvs. $H_n(X^n) \cong H_n(X^n, X^{n-1})$

Fra 2.3.4 a) får vi at $H_n(X^n)$ er fri med ~~generatorer~~ basis ~~e~~ i korrespondanse med antall n-celler. La nå $\dim X = m > n$.

Siden X ikke har $n+1$ celler må $m > n+1$ (ellers var $X^n = X^{n+1} = X$). Videre er $X^n = X^{n+1}$

~~Dett~~ Da gir c) i 2.3.4 oss at

$H_n(X^n) = H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{i_*} H_n(X)$ er isomorfi

og vi får $H_n(X)$ har basis i en til en korrespondanse med antall celler.

c) Anta nå X har $k \cdot n$ celler.

Skal vise at $H_n(X)$ er generert av høyst k elementer.

Vi vet at $H_n(X) \approx H_n(X^{n+1})$ (c.) Lemma 2.3.4)

Vi har videre

$$\to 0 = H_n(X^{n-1}) \to H_n(X^n) \to H_n(X^n, X^{n-1}) = \text{fri med } k \text{ generatorer,}$$

dvs. $H_n(X^n)$ er isomorf med undergruppe av $H_n(X^n, X^{n-1})$ så $H_n(X^n)$ har høyst k generatorer.

Vi har videre

$$H_{n+1}(X^n) = 0 \to H_{n+1}(X^{n+1}) \to H_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$$

$$\to H_n(X^n) \to H_n(X^{n+1}) \to 0 = H_n(X^{n+1}, X^n)$$

dvs. vi har surjektiv avbildning $H_n(X^n) \to H_n(X^{n+1})$ og da kan $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(\cancel{X})$ ha høyst k-generatorer.