Homologi og fundamentalgruppen

$f: I \to X$ vei.

Har $\Delta^1 \simeq I$, f kan identifiseres med 1-simpleks σ

Om f loop, $f(0)=f(1)=x_0$, så er $\partial\sigma = x_0 - x_0 = 0$.
Omvendt ~~et~~ singulært 1-simpleks kan oppfattes som en vei.
Vi har derfor at $[\sigma] \in H_1(X)$, avbildning
$f = \sigma \to [\sigma]$ vil gi oss en avbildning
$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} H_1(X)$ og vi har

Teorem (2.A.1)
Vi har en homomorfi $h: \pi_1(X,x_0) \to H_1(X)$.
Om X er veisshdo er h surjektiv og
$\ker h$ = kommutatorundergruppa i $\pi_1(X,x_0)$

Bevis

Vi må først se at vi kan definere h og at h er en gruppehomomorfi.

Gitt to veier $f,g: I \to X$ som vi oppfatter som 1 simplekser, vi skriver $f \sim g$ dersom kjeden $f-g$ er en rand dvs. $f - g = \partial\sigma$, $\sigma \in C_2(X)$

Merk at $\sim$ er opplagt en ekvivalens relasjon.

i) Anta først f er konstant vei, $f(t) = x_0 \ \forall t$.

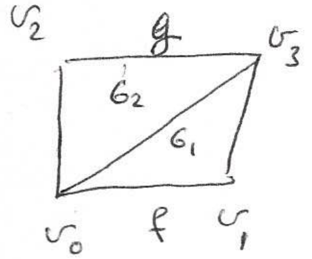
La $\sigma: \Delta^2 \to X$ være konstant 2-simpleks.

Da er $\partial \sigma = f - f + f = f$, dvs. $f \sim 0$

ii) Anta f, g to veier slik at $f \underset{\sim}{\simeq} g$, dvs.

$\exists \ F(t,s) = f_t(s)$ med $f_0 = f, f_1 = g$ og $y_0 = f_t(0) = f(0) = g(0) \ \forall t$

$z_0 = f_t(1) = f(1) = g(1) \ \forall t$.



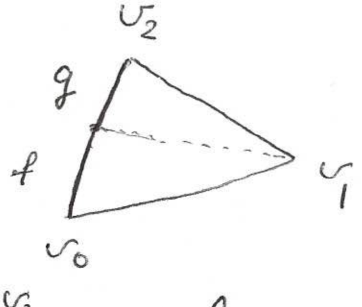
$$\begin{tikzcd} \Delta^2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\sigma_1"] & {[v_0, v_1, v_3]} \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Delta^2 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sigma_2"'] & {[v_0, v_2, v_3]} \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

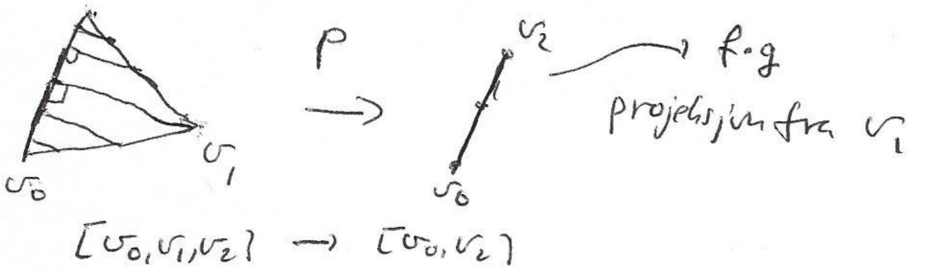
$\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \partial\sigma_1 - \partial\sigma_2 = (z_0 - F|[v_0, v_3] + f) - (g - F|[v_0, v_3] + y_0)$

$= z_0 + f - g - y_0$ ~~$+ f g$~~, dvs. $f \sim g$. Siden $z_0, y_0 \sim 0$.

iii) Skal vise $f \cdot g \sim f + g$



La



$\sigma = (f \cdot g) \circ p$, $\partial \sigma = g - f \cdot g + f \Rightarrow g + f \simeq f \cdot g$.

iv) Vi får nå

$$f + \bar{f} \sim f \cdot \bar{f} \sim 0 \text{ dvs. } \bar{f} \sim -f.$$

Tilsammen gir dette at $[f] \in \pi_1(X, x_0) \to [f] \in H_1(X)$ gir en veldefinert gruppe homomorfi h.
(veldefinert på grunn av ii) og en gruppehomomorfi på grunn av i) iii) iv).)

Anta X er veisldo. Da er h surjektiv:

La $c = \sum_i n_i \sigma_i$ være sykel i $C_1(X)$.

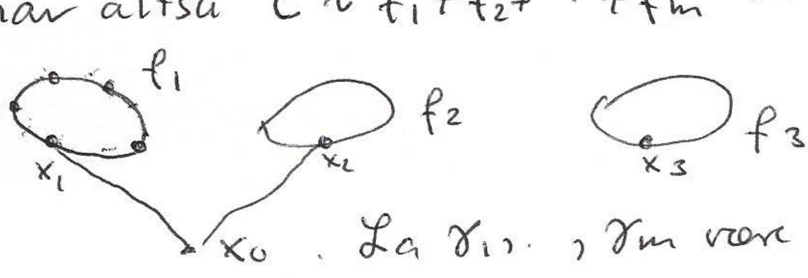
Kan anta $n_i = \pm 1$ for hver i. Om vi har $-\sigma_i$ erstatter vi den med $\bar{\sigma}_i$ (som er homolog med $-\sigma_i$)

dvs. $n_i = 1 \ \forall i$. Vi vet at $\partial c = 0$.

Det betyr at om σ_i er 1-simpleks og $\sigma_i(v_0) \neq \sigma_i(v_1)$ så fins σ_j med $\sigma_j(v_0) = \sigma_i(v_1)$. Vi kan fortsette slik

at vi får en simplekser som setter seg sammen til sammensetningen av veier som blir loops.

Vi har altså $c \sim f_1 + f_2 + \cdots + f_m$ der hver f_i er en loop.



La $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ være vei fra x_0 til x_i

Har da $\gamma_1 f_1 \bar{\gamma}_1 \gamma_2 f_2 \bar{\gamma}_2 \qquad \gamma_m f_m \bar{\gamma}_m$

$$\sim \gamma_1 + f_1 - \gamma_1 + \gamma_2 + f_2 - \gamma_2 \qquad \gamma_m + f_m - \gamma_m$$

$$= f_1 + \cdots + f_m \sim c$$

Dvs. $h([\gamma_1 f_1 \cdots \gamma_m f_m \bar{\gamma}_m]) = [c] \in H_1(M)$.

Minner om at om G er en gruppe, så er kommutator undergruppa gruppa generert av alle $ghg^{-1}h^{-1}$, $g,h \in G$. Dette er en normal undergruppe og deler vi ut med denne får vi $(G)_{ab}$ som er abelsk, og om H er abelsk gruppe med homomorfi $G \xrightarrow{h} H$ så har vi alltid

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d] & H \\ (G)_{ab} \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Videre hvis $\bar{h}$ er injektiv, har vi da konkludere med at $\ker h$ = kommutator undergruppa til G.

Det er nettopp det vi skal se nemlig at

$$\pi(X, x_0)_{(ab)} \xrightarrow{\bar{h}} H_1(X) \text{ er injektiv.}$$

Ta først $[f] \in \pi_1(X)$ med $h([f]) = 0 \in H_1(X)$

Da fins $\sum_i n_i \sigma_i \in C_2(X)$ med

$f = \partial(\sum n_i \sigma_i)$. Kan anta $n_i = \pm 1 \ \forall i$.

~~Gitt~~ σ_i la Δ_i^2 være 2-simpleks.

Vi har $\partial \sigma_i = \tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$ der τ_{ij} er singulære 1-simplekser. ~~Av vi har 6~~

Vi har $f = \partial(\sum n_i \sigma_i) = \sum_i n_i (-1)^j \tau_{ij}$

Må da ha $f = n_i (-1)^j \tau_{ij}$ for én (i,j)

og de andre $n_i (-1)^j \tau_{ij}$ må kanselerer 2-og to.
dvs $n_i(-1)^j \tau_{ij} = -n_{i'}(-1)^{j'} \tau_{i'j'}$ for et par $((i,j),(i',j'))$.

Vi skal nå til $\sum n_i \sigma_i$ lage et Δ-kompleks.
der 2-simpleksene er $\{\Delta_i^2 : i\}$. Hvis nå
$\tau_{ij} = \tau_{i'j'}$ for par $(i,j) = (i',j')$. Lim sammen
tilsvarende kanter i Δ_i, $\Delta_{i'}$. Vi ender opp med
et Δ-kompleks K der f er en kant i bare ett 2 simpleks ~~nett~~ men alle andre kanter i 2-simpleksene
identifiseres med andre kanter.

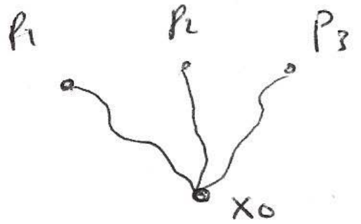
Vi har nå $\sigma_i : \Delta_i^2 \to X$ og kan lage $\sigma : K \to X$

Skal lage homotopi $\sigma \simeq \tilde{\sigma}$, slik at $\tilde{\sigma} : K \to X$
og alle 0-simplekser (hjørner) avbildes på x_0.

La K_0 være 0 skjelett til K.

For $p \in \sigma(K_0)$ lag vei fra ~~(p)~~ til x_0

(eventuelt konstant vei om ~~σ~~ $p = x_0$.



Vi Betrakt underkompleks $L = K_0 \cup e \subset K$

der e er kanten svarende til f.

Kan da lage homotopi $\sigma|L \simeq \tilde{\sigma}$

der $\tilde{\sigma}$ avbilder K_0 på x_0 og e konstant

på f. (Dvs. $\sigma_t : \Delta^1 = e \to X$, $\sigma_t = f \ \forall t$.)

(K, L) oppfyller HEP (et kompleks og underkompleks)

Kan utvide σ_t til $\sigma_t : K \to X$

Det vi nå har er at om $\sigma_i : \Delta^2 \to X$ erstattes

med $\sigma|\Delta_i^2 = \tilde{\sigma}_i$, så får vi ny kjede

$\sum_i n_i \sigma_i$, der $\partial \tilde{\sigma}_i = \tilde{\tau}_{i0} - \tilde{\tau}_{i1} + \tilde{\tau}_{i2}$ ~~og $\tilde{\tau}_{ij} = \tau$.~~

og fortsatt kansellerer alle render to og to bortsett fra f, men nå er alle $\tilde{\tau}_{ij}$ loops i x_0. Dvs.

Vi kan skrive $f = \partial(\sum n_i \sigma_i) = \sum_i (-1)^j n_i \tau_{ij}$

der alle τ_{ij} er loops. Merk at i $\pi_1(X, x_0)$

La nå $g_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij} & \text{om } (-1)^j n_i = 1 \\ \bar{\tau}_{ij} & \text{om } (-1)^j n_i = -1 \end{cases}$

La $[g] = [g_{10}][g_{11}][g_{12}][g_{20}][g_{21}][g_{22}] \cdots$

$[g] \in \pi_1(X, x_0)$. Merk at $\sigma_i : \Delta^2 \to X$

Loopen

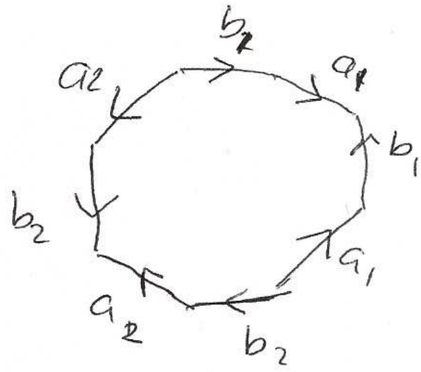
Så er $[\partial \sigma_i]$ enten $[g_{i0}][\bar{g}_{i1}][g_{i2}]$

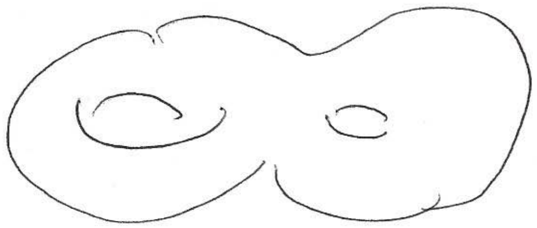
eller den inverse, men siden Δ^2 er ~~k~~ kontraktibel,

og $[\sigma_i] = 0$. og $[g] = 0$ i $\pi_1(X, x_0)$.

Men siden $f \sim \partial \sigma$ og vi kan flytte på faktorer i $\pi_1(X, x_0)_{ab}$ og to og to kanselerer, vil bildet av $[f]$ og bildet av $[g]$ i $\pi_1(X, x_0)_{ab}$ være det samme, dvs. $[f] = 0$ i $\pi_1(X, x_0)_{ab}$.

<u>Eksempel</u> M_g flate av genus g

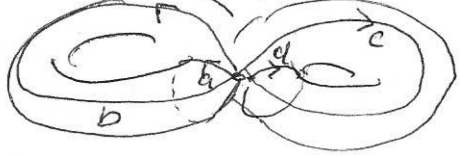




$$\pi_1(M_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \underbrace{[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_g,b_g]}_{\text{produktet av alle kommutatorene.}} \rangle$$

$$[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$$

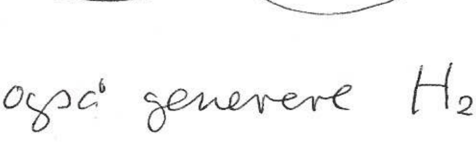
Kommutator undergruppe blir gruppa generert av alle kommutatorene. Vi får fri abelsk gruppe med $2g$ generatorer dvs. $\pi_1(M_g)/\text{kommutator undergruppe}$ $\cong \mathbb{Z}^{2g} = H_1(M_g)$. I $\pi_1(M_g)$ var fundamental gruppa generert av loops svarende til sirklene i 1. skjelettet



a, b, c, d i M_2

Disse vil da også generere $H_2(M_g)$

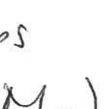
Merk videre



γ loop dvs $[\gamma] \in \pi_1(M_2)$

men $\gamma \sim 0$ i $H_2(M_2)$

homotop med a



a $aba^{-1}b^{-1}$