MAT4590, VÅREN 2014 — OBLIGATORISKE OPPGAVER

Løsninger leveres til foreleser senest fredag 25. april kl 1430.
For generelle regler om obligatoriske oppgaver, see nettsidene.

Oppgave 1

Parametriser et område i det Euklidske planet $\mathbb{R}^2$ ved polarkoordinater:

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Finn Christoffelsymbolene med disse parameterne.

Oppgave 2

La E være en vektorbunt med konneksjon over en Riemannsk mangfoldighet M. Hvis s er en seksjon i E, kan vi tenke på ∇s som en tensor $X \mapsto \nabla_X s$, gjerne kalt *den kovariant deriverte av s.* Denne tensoren kan vi så igjen derivere og definere *den kovariant annenderiverte* $\nabla^2 s = \nabla(\nabla s)$. En vanlig notasjon er $\nabla^2_{X,Y} s = \nabla_X(\nabla s)(Y)$.

(a) Vis formlene

(i) $\nabla^2_{X,Y} s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_{\nabla_X Y} s$

(ii) $\nabla^2_{Y,X} s - \nabla^2_{X,Y} s = R(X, Y)s$,

der R er krumningstensoren.

(b) Vi spesialiserer nå til tilfellet der E er en triviell en-dimensjonal bunt med standard konneksjon, dvs. s er en reell glatt funksjon f. Da definerer vi *Hess-operatoren* $H(f)$ på vektorfelter ved ligningen $\nabla^2_{X,Y} f = \langle H(f)(X), Y\rangle$.

Vis at $H(f)$ er symmetrisk, dvs. $\langle H(f)(X), Y\rangle = \langle X, H(f)(Y)\rangle$.

Laplace-operatoren er definert som $\Delta f = \mathrm{tr} H(f)$. Regn ut Δf i tilfellet $M = \mathbb{R}^2$, både med kartesiske koordinater og med polarkoordinater.

Oppgave 3

La S være en 2-dimensjonal Riemannsk mangfoldighet og la $\gamma : I \to S$ være en geodetisk kurve parametrisert ved buelengde. La Y være et vektorfelt langs γ slik at $\langle Y(t), \gamma'(t)\rangle = 0$ og $|Y(t)| = 1$ for alle t.

(a) Vis at Y er parallelt langs γ.

(b) La $f : I \to \mathbb{R}$ være en glatt funksjon. Vis at fY er et Jacobifelt langs γ hvis og bare hvis f tilfredsstiller differensialligningen $f''(t)+K(\gamma(t))f(t) = 0$, der K er Gausskrumningen på S.

Oppgave 4

Vi har sett at forskjellige krumningstensorer ikke kan gi opphav til samme snittkrumning. (Do Carmo, Lemma 4.3.3.) Her er et sterkere resultat: en formel som uttrykker krumningstensoren ved snittkrumningene.

Sett som før $(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z,W\rangle$. Vis at

$$\begin{aligned}6(X,Y,Z,W) \;\; &= \;\; \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\bigg|_{s=t=0}\big\{(X+sZ,Y+tW,X+sZ,Y+tW) \\ &\qquad\qquad -(X+sW,Y+tZ,X+sW,Y+tZ)\big\}.\end{aligned}$$

Oppgave 5

I denne oppgaven skal vi vise at ligningene til Gauss og Codazzi spesialiserer seg til klassiske formler for flater i rommet. Her vil vi bruke notasjonen f_u, f_{uv} etc. for partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}, \ldots$ av avbildninger f inn i Euklidske rom $\mathbb{R}^n$.

La $S \subset \mathbb{R}^3$ være en to-dimensjonal undermangfoldighet av $\mathbb{R}^3$, med indusert metrikk. Hvis $x(u,v)$ er en lokal parametrisering på S, kan vi også betrakte x som en avbildning inn i $\mathbb{R}^3$, og de partielle deriverte x_u og x_v er da ikke noe annet enn den assosierte basisen for tangentrommene til S. En klassisk notasjon for den første fundamentalformen er da

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12}, \quad G = g_{22}.$$

Hvis η er et normalfelt på S med $|\eta| = 1$, er den andre fundamentalformen bestemt av funksjonene

$$L = B(x_u, x_u)\cdot\eta, \quad M = B(x_u, x_v)\cdot\eta, \quad N = B(x_u, x_u)\cdot\eta.$$

(a) Vis at krumningen på S er gitt ved formelen

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

(b) Vis at Codazzis ligning i denne situasjonen reduseres til ligningene

$$\begin{aligned}L_v - M_u &= L{\Gamma^1}_{12} + M({\Gamma^2}_{12} - {\Gamma^1}_{11}) - N{\Gamma^2}_{11}\\ M_v - N_u &= L{\Gamma^1}_{22} + M({\Gamma^2}_{22} - {\Gamma^1}_{12}) - N{\Gamma^2}_{12}\,.\end{aligned}$$