

# Innlevering 2, MEK1100, høsten 2004

Frist: 12. november kl. 14:30

## 1 Oppgaver

1. Undersøk om det finnes et hastighetspotensiale  $\phi$  og en strømfunksjon  $\psi$  for følgende vektorfelt. Bestem funksjonene  $\phi$  og  $\psi$  i de tilfellene de finnes. Plott vektorfeltene med Matlab.

a)  $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$

b)  $\mathbf{v} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

c)  $\mathbf{v} = (y + xy - y^2)\mathbf{i} + (x - 2xy + \frac{1}{2}x^2)\mathbf{j}$

d)  $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

2. Gitt et tre-dimensjonalt vektorfelt  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (2y+z)\mathbf{j} + (z+x^2)\mathbf{k}$  i kartesiske koordinater  $xyz$ . Beregn vektorfluksen  $Q = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  gjennom følgende flater  $\sigma$  hvor  $\mathbf{n}$  er normalvektoren:

a) En kuleflate med sentrum i origo og radius  $a$

b) Overflaten av en terning med sentrum i origo og sidekanter  $a$

c) Hva blir resultatene dersom sentrum av kula og terningen flyttes til et annet punkt i feltet?

3. Gitt et to-dimensjonalt vektorfelt  $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$  i  $xy$ -planet.

a) Beregn sirkulasjonen av  $\mathbf{F}$  omkring en lukket kurve  $\lambda$  gitt ved  $x = a \cos t$  og  $y = b \sin t$  hvor  $a, b$  er konstante og parameteren  $t$  ligger i følgende intervall  $0 < t < 2\pi$ .

b) Bruk Greens sats til å kontrollere resultatet.

c) Hvordan tolker du dette resultatet?

d) Plott vektorfeltet  $\mathbf{F}$  for  $x, y \in [-3, 3]$  i samme figur som  $\lambda$  for  $(a, b) = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ . Hvilken relasjon har  $\lambda$  til  $\mathbf{F}$  når  $a = b$ ?

4. En strømfunksjon er gitt i kartesiske koordinater  $xy$  ved

$$\psi(x, y) = A \left[ \frac{y}{2a} + \ln(x^2 + (y - a)^2)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^2 + (y + a)^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

a) Gjør rede for hvilket felt hvert av leddene i uttrykket ovenfor representerer (kort forklaring).

b) Hvorfor eksisterer det et hastighetspotensiale for dette feltet?

c) Sett  $\frac{A}{2a} = U$  og finn strømkomponentene  $u$  og  $v$  henholdsvis i  $x$ - og  $y$ -retning. Hva blir strømhastigheten i origo og for punkter  $|x| \gg a$  og  $|y| \gg a$ ? Vis at  $x$ -aksen er en strømlinje. Finn noen andre punkter på strømlinjen  $\psi = 0$ .

d) Sett  $A = a = 1$  og bruk Matlab til å regne ut verdien av  $\psi$  i området  $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-5 \leq y \leq 5$  med intervaller  $\Delta x = \Delta y = 0.1$ . Bruk resultatet til å plotte konturlinjer for

- $\psi_0 = \{-2.0, -1.9, -1.8, \dots, 1.8, 1.9, 2.0\}$  i én figur uten tallverdiene markert, og
- $\psi_0 = \{-2.0, -1.6, -1.2, \dots, 1.2, 1.6, 2.0\}$  i én figur med tallverdiene markert.

e) Prøv å gi en fysikalsk tolkning av dette feltet (kort forklaring).