UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Onsdag 12 juni 2013.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ er definert av potensialet $\phi = x^2 - y^2$. Finn vektorfeltet $\boldsymbol{v}$. Finn strømfunksjonen ψ dersom den eksisterer. Vis at feltet har et stagnasjonspunkt (hvor $\boldsymbol{v} = 0$). Finn strømlinjene gjennom stagnasjonspunktet. Tegn en skisse hvor stagnasjonspunktet er markert med $\bullet$, strømlinjer er markert med heltrukne linjer, ekvipotensialkurver er markert med stiplede linjer, og retningen til feltet er markert med piler.

Oppgave 2

Et fluid med tetthet ρ beveger seg i xy-planet i hastighetsfeltet til en punktvirvel gitt i henholdsvis polare og kartesiske koordinater ved

$$\boldsymbol{v} = \frac{A}{r}\boldsymbol{i}_\theta = \frac{A}{x^2+y^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$$

hvor $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

2a

Regn ut sirkulasjonen rundt en sirkel i xy-planet med radius R og sentrum i origo.

(Fortsettes på side 2.)

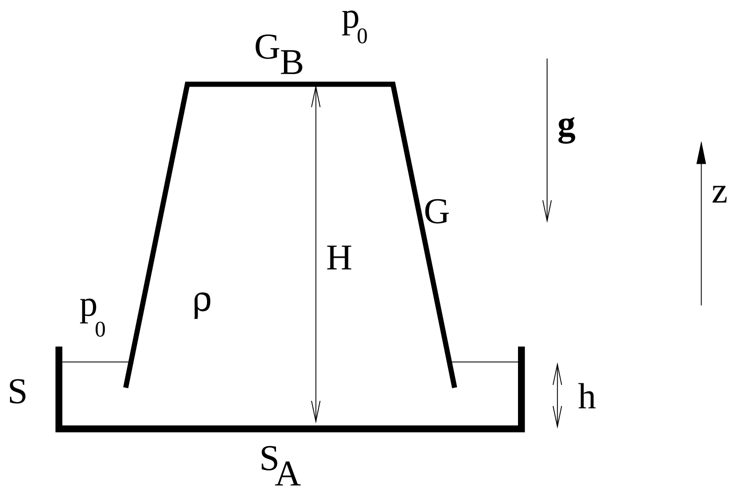
2b

Regn ut akselerasjonen til en fluidpartikkel i dette feltet.

2c

Regn ut trykket. Vi forutsetter at trykkraften er den eneste kraften som virker og at trykket langt fra origo er lik p_0.

Oppgave 3



Et glass (G) er fylt med vann og holdes med bunnen G_B opp og med åpningen ned mot ei skål (S) uten å komme i berøring med skåla. Bunnen av skåla (S_A) er horisontal med areal A. Bunnen av glasset (G_B) er horisontal med areal B. Vannet har høyde h fra bunnen av skåla til fri luft, og har høyde H fra bunnen av skåla til bunnen av glasset. Lufta har konstant trykk p_0 overalt. Vannet har tetthet ρ. Tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er rettet nedover. z-aksen peker oppover.
Finn trykket i vannet like oppunder glassets bunn G_B. Finn trykkraften som virker fra vannet på glassets bunn G_B.

Oppgave 4

I et rektangulært rom er temperaturen ved et bestemt tidspunkt gitt ved

$$T = T_0 + A(xa - x^2)(yb - y^2)z \qquad \text{for} \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad 0 \le z \le c$$

hvor T_0 og A er konstanter. Her er x- og y-aksene horisontale og z-aksen peker oppover. Vi antar at lufta i rommet er i ro, har varmeledningstall k og varmediffusivitet κ.
Varmeflukstettheten er gitt ved Fouriers lov $\boldsymbol{H} = -k\nabla T$, og varmelikninga er gitt ved

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T.$$

(Fortsettes på side 3.)

4a

Angi de fysiske enhetene (dimensjonene) til A, k, κ, T og $\boldsymbol{H}$.

4b

En mygg svever i midten av rommet $\left\{x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}\right\}$. I hvilken retning må myggen fly for raskest mulig å komme til kjøligere temperatur?

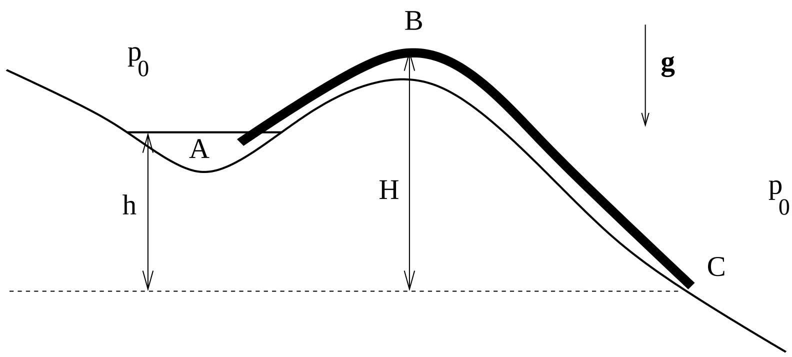
4c

Undersøk om temperaturfordelingen gitt ovenfor er en likevektsløsning av varmelikninga. Finn ut om temperaturen i midten av rommet $\left\{x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}\right\}$ vil holde seg konstant, øke eller avta.

4d

Vis at den totale varmefluksen ut gjennom samtlige vegger, gulv og tak kan skrives som et volumintegral over hele rommet. Regn ut hvor stor fluksen er.

Oppgave 5



For å skaffe vann er det lagt ut et rør fra en innsjø (A) hvor vannspeilet ligger i en høyde h over stedet (C) hvor det tappes fra røret. Røret er lagt over et lite høydedrag (B) og det har vært nødvendig å pumpe vann gjennom røret for å få det til å renne som i en hevert. Høyeste punkt på røret (B) ligger en høyde H over tappestedet (C). Bestem strømfarten og volumfluksen når vi forutsetter stasjonær friksjonsfri strøm og at røret har konstant tverrsnitt S.

SLUTT