UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Fredag 13 desember 2013.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

En stav har lengde L og tverrsnitt A og ligger langs x-aksen mellom $x = 0$ og $x = L$. Temperaturen i staven $T(x,t)$ er funksjon av rom x og tid t, og er konstant i ethvert tverrsnitt $x =$ konstant. Ved tiden $t = 0$ er temperaturprofilen

$$T(x) = \alpha + \beta x^3.$$

Varmelikninga er gitt ved

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

Varmefluksttettheten er gitt ved

$$\boldsymbol{H} = \rho c \boldsymbol{v} T - k \nabla T$$

Her er ρ tettheten, c varmekapasiteten, k varmeledningstallet og κ varmediffusiviteten til staven.

1a

Gitt at lengde måles i meter (m), tid måles i sekund (s) og temperatur måles i Kelvin (K), forklar hva som er de fysiske enhetene til α, β, κ, k og $\boldsymbol{H}$.

Forklar hva størrelsen $\boldsymbol{v}$ er og hvilken verdi den har i vårt problem.

(Fortsettes på side 2.)

1b

Undersøk om temperaturen i staven vil øke, avta eller holde seg konstant, umiddelbart etter tiden $t = 0$.
Regn ut varmefluksen Q i x-retning ved $x = L$ ved tiden $t = 0$.

Oppgave 2

Et fluid med konstant tetthet ρ har en horisontal bevegelse nær origo beskrevet av hastighetspotensialet

$$\phi = xy^2 - \frac{1}{3}x^3$$

2a

Finn hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ og bestem divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.
Forklar hvorfor dette kan være en god modell nær origo, men ikke kan være en god modell langt vekk fra origo.

2b

Undersøk om vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon ψ, og finn i så fall strømfunksjonen.
Finn alle stagnasjonspunktene (punkter hvor hastighetsfeltet er lik null), og bestem alle strømlinjene som går igjennom stagnasjonspunktene.
Tegn ei skisse av feltet.

2c

Forklar betingelsene for å bruke Bernoullis likning.
Finn trykket på et vilkårlig sted langs x-aksen, gitt at trykket i origo er p_0.
For hvilke verdier av x gir dette trykket fysisk mening?

Oppgave 3

De krumlinjede koordinatene $\{u, v, w\}$ og de kartesiske koordinatene $\{x, y, z\}$ er relatert ved likningene

$$x = uvw$$
$$y = uv\sqrt{1 - w^2}$$
$$z = \frac{u^2 - v^2}{2}$$

3a

Bestem skaleringsfaktorene til $\{u, v, w\}$.

(Fortsettes på side 3.)

3b

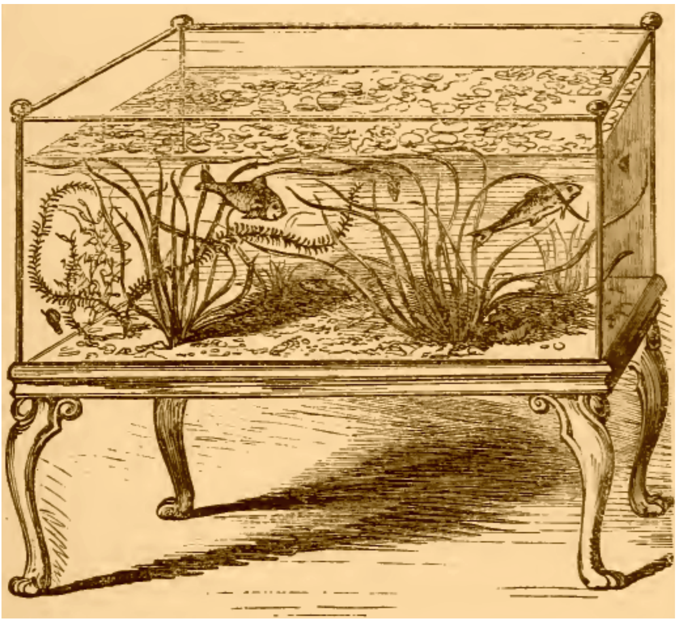
Bestem om koordinatene $\{u, v, w\}$ er ortogonale.

3c

Finn et uttrykk for det infinitesimale volumelementet uttrykt i $\{u, v, w\}$-koordinater.

Oppgave 4

Et akvarium er fylt med vann. Vanndybden er h. De horisontale sidekantene er a og b. Rundt akvariet har vi luft med trykk p_0. Vannet er i ro og har tetthet ρ. Tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er rettet nedover. z-aksen peker oppover og har null-nivå i vannoverflaten.



Illustrasjon hentet fra Wikipedia:

Shirley Hibberd, The Book of the Aquarium and Water Cabinet. London: Groombridge & Sons. 1856.

Vannet er avgrenset av seks flater, én mot luft på toppen og fem mot glass. Grenseflaten mot luft kaller vi S_l og er gitt ved $\{z = 0\}$. De fem grenseflatene mot glass gir vi fellesbetegnelsen S_g.

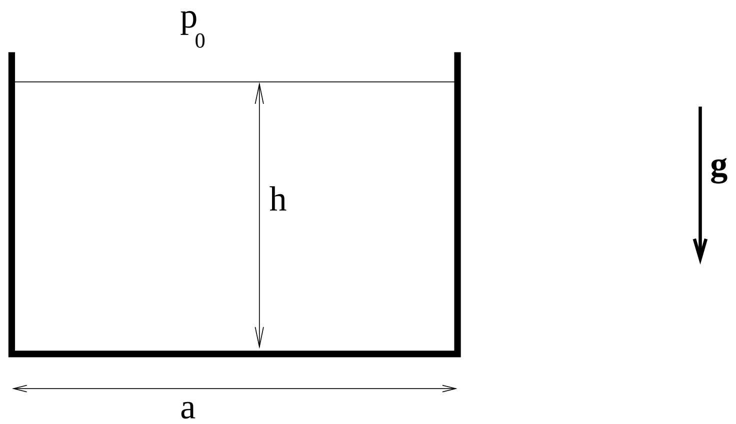
4a

Skriv et uttrykk for det hydrostatiske trykket i vannet.
Regn ut krafta $\boldsymbol{F}_l$ som virker fra lufta på vannoverflaten S_l.
Skriv netto kraft $\boldsymbol{F}_g$ som virker fra vannet på glassflatene S_g som et flateintegral over S_g. Vis ved hjelp av en passende integralsats at $\boldsymbol{F}_g$ kan skrives ved hjelp av et volumintegral over alt vannet og $\boldsymbol{F}_l$. Regn ut $\boldsymbol{F}_g$.

(Fortsettes på side 4.)

4b

Til slutt skal vi betrakte én av de vertikale sidene til akvariet. Den er utsatt for henholdsvis lufttrykk og vanntrykk på utsiden og innsiden. Denne siden har rektangulær form, med bredde a i horisontal retning, og vannet har høyde h i vertikal retning. Den aktuelle siden er vist i figuren nedenfor og ligger i xz-planet, vannet befinner seg her i området $y > 0$.



Regn ut den totale trykkrafta som virker på denne ene siden av akvariet.

SLUTT