UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Onsdag 11 juni 2014.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Et rom har utstrekning $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ og $0 \leq z \leq H$. Her er x og y horisontale koordinater, z er vertikal koordinat og z-aksen peker oppover. Lufta i rommet har temperatur $T(x, y, z, t)$. Det er ingen varmekilder i rommet.
Ved tiden $t = t_0$ står lufta i rommet helt i ro og har temperaturfordeling

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z) = A + B \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L) \sin(\pi z/H)$$

hvor A og B er positive konstanter.
Vegger, gulv og tak holder konstant temperatur $T = A$ for alle tider t. Vi ønsker å undersøke hvordan det går med temperaturfordelingen i rommet etterhvert som tiden øker.
Varmelikninga er gitt ved

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

og varmeflukstettheten er gitt ved

$$\boldsymbol{H} = \rho c \boldsymbol{v} T - k \nabla T$$

hvor ρ er tettheten, c er den spesifikke varmekapasiteten, k er varmeledningstallet og κ er varmediffusiviteten til lufta.

(Fortsettes på side 2.)

1a

Gitt at lengde måles i meter (m), tid måles i sekund (s) og temperatur måles i Kelvin (K), forklar hva som er de fysiske enhetene til A, B, κ, k og $\boldsymbol{H}$.

Forklar hva størrelsen $\boldsymbol{v}$ er og hvilken verdi den har ved tiden $t = t_0$.

En mygg befinner seg på et vilkårlig sted på gulvet, med posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, ved tiden $t = t_0$. Hvilken retning bør myggen fly for å komme fortest mulig til høyere temperatur?

1b

Undersøk om temperaturen i rommet vil endres eller holde seg konstant umiddelbart etter tiden $t = t_0$.
Dersom temperaturen vil endres, hvor vil den øke og hvor vil den avta umiddelbart etter $t = t_0$?

1c

Vi skal finne varmefluksen Q (energi per tid) ut av rommet ved tiden $t = t_0$. Vis at dette kan uttrykkes både som et flateintegral og som et volumintegral ved å anvende en passende integralsats. Regn ut Q på én av måtene.

Oppgave 2

Vann med konstant tetthet ρ roterer i en virvelstrøm med et hastighetsfelt som er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \frac{A\boldsymbol{i}_\theta}{\sqrt{r}}$$

hvor A er en konstant. Her benytter vi sylinderkoordinater $\{r, \theta, z\}$ hvor z-aksen er rotasjonsakse og peker oppover, r er horisontal avstand fra rotasjonsaksen, og θ er en vinkel i horisontalplanet.
Vannet er i kontakt med luft ved den frie overflaten $z = \eta(r, \theta)$, og vi antar at lufta har konstant trykk p_0.

2a

Regn ut divergensen og virvlinga til hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$.

2b

Undersøk om hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon ψ, og finn i så fall strømfunksjonen.
Undersøk om hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ har et potensial ϕ, og finn i så fall potensialet.

(Fortsettes på side 3.)

2c

Finn strømlinjene til hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$.
Finn alle stagnasjonspunkter (punkter hvor hastighetsfeltet er lik null), og alle singulære punkter (punkter hvor hastighetsfeltet går mot uendelig).
Tegn en skisse av feltet.

2d

Finn akselerasjonen til en partikkel som beveger seg med hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$.

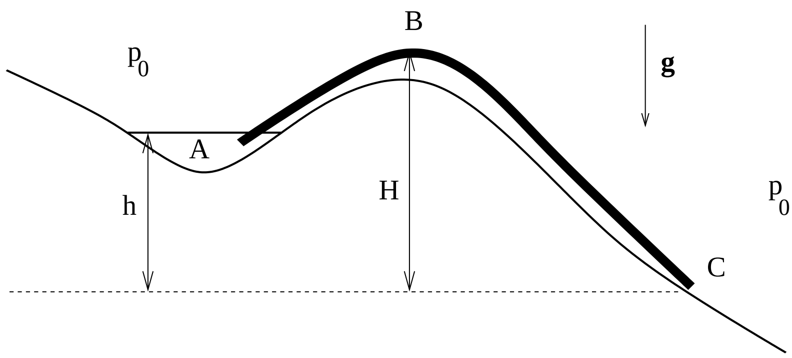
2e

Skriv ned Bernoullis likning og forklar betingelsene for å bruke den.
Forklar om Bernoullis likning kan brukes for å finne trykkfordelingen i vannet.

2f

Finn trykket på et vilkårlig sted i vannet.
Finn formen på den frie vannoverflaten $z = \eta(r, \theta)$.

Oppgave 3



For å skaffe vann er det lagt ut et rør fra en innsjø (A) hvor vannspeilet ligger i en høyde h over stedet (C) hvor det tappes fra røret. Røret er lagt over et lite høydedrag (B) og det har vært nødvendig å pumpe vann gjennom røret for å få det til å renne som i en hevert. Høyeste punkt på røret (B) ligger en høyde H over tappestedet (C). Bestem strømfarten og volumfluksen når vi forutsetter stasjonær friksjonsfri strøm og at røret har tverrsnitt med areal S.

SLUTT