UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Onsdag 12 juni 2015.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Et vektorfelt er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = xy^2\boldsymbol{i} - x^2y\boldsymbol{j}$$

1a

Regn ut divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.

1b

Undersøk om vektorfeltet har en strømfunksjon ψ og finn i så fall strømfunksjonen. Undersøk om vektorfeltet har et potensial ϕ og finn i så fall potensialet.

1c

Finn strømlinjene til vektorfeltet. Lag en skisse hvor en håndfull strømlinjer er tegnet inn. Finn alle stagnasjonspunkter (der hvor $\boldsymbol{v} = 0$) og marker disse tydelig i skissen. Sett piler på strømlinjene for å indikere retningen til vektorfeltet.

(Fortsettes på side 2.)

1d

Vi skal regne ut sirkulasjonen rundt en lukket kurve γ som er definert ved tre punkter A, B og O slik:
La A være punktet (1,0). La B være punktet (0,1). La O være origo (0,0). La kurven γ gå fra O til A langs ei rett linje, fra A til B langs en sirkelbue med radius 1 og sentrum i origo, og fra B til O langs ei rett linje.
Regn ut sirkulasjonen rundt kurven γ.

Oppgave 2

Vi skal betrakte et rett rør, med x-aksen som senterakse, og med sirkulært tverrsnitt med radius a. Inni røret er det ei væske som har strømningshastighet

$$\boldsymbol{v} = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \boldsymbol{i}$$

hvor r er radiell avstand fra senteraksen, v_0 er væskas fart midt i røret, og $\boldsymbol{i}$ er enhetsvektor i x-retning.
Ved tidspunkt $t = t_0$ er temperaturfordelingen i væska gitt ved

$$T = T_0 + \alpha x$$

hvor T_0 og α er konstanter. Ved dette tidspunktet er altså temperaturen kun avhengig av x og er følgelig konstant i tverrsnitt for fastholdt x.
Vi har lært at varme kan transporteres delvis ved konveksjon og delvis ved ledning, med varmeflukstetthet gitt på formen

$$\boldsymbol{H} = \rho c \boldsymbol{v} T - k \nabla T$$

Varmetransportlikninga er gitt ved

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

2a

Forklar hva symbolene ρ, T, k, κ og $\boldsymbol{H}$ står for, og forklar hvilke fysiske enheter disse har.

2b

Regn ut den totale varmefluksen gjennom et tverrsnitt gjennom røret ved $x = x_0$ ved tidspunkt $t = t_0$.

2c

Holder temperaturen seg konstant eller endrer den seg i tid ved tidspunktet $t = t_0$? Ved et etterfølgende tidspunkt $t_1 > t_0$, kommer temperaturfordelingen fortsatt til å være konstant i tverrsnitt for fastholdt x?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

En kopp er sylinderformet med senterakse langs z-aksen og med radius a. I koppen er det vann med konstant tetthet ρ. Origo er midt i bunnen av koppen og z-aksen peker oppover. Tyngdens akselerasjon peker nedover, $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$, hvor $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektor i z-retning. Over den frie vannoverflaten er det luft med konstant trykk p_0. Når vannet er i ro har det en horisontal overflate i en høyde h over bunnen av koppen.

3a

For stillestående vann i koppen, finn det hydrostatiske trykket p i vannet, og regn ut den totale hydrostatiske trykkrafta $\boldsymbol{F}$ på bunnen av koppen.

I resten av oppgaven antar vi at vannet roterer som et fast legeme med hastighetsfelt gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

hvor $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ er den konstante vinkelhastigheten til rotasjonsbevegelsen og $\boldsymbol{R}$ er posisjonsvektor relativt til origo midt i bunnen av koppen. Vi skriver $\boldsymbol{R} = r\boldsymbol{i}_r + z\boldsymbol{k}$ hvor r er radiell avstand fra senteraksen og z er høyden over bunnen.

3b

Regn ut akselerasjonen til vannpartiklene.

3c

Vi skal nå finne trykket p i vannet når det roterer som et fast legeme. Diskuter om dette kan gjøres ved hjelp av Eulers likning eller Bernoullis likning.

Regn ut trykket i det roterende vannet i koppen.

Hint: For å løse denne oppgaven fullstendig kan vi anta at den frie overflata har formen $z = \eta(r)$. Den frie overflata befinner seg der hvor vanntrykket er lik lufttrykket, $p = p_0$. Vi forutsetter at den totale mengden vann i koppen er uendret.

Regn ut om den totale trykkrafta på bunnen av koppen med roterende vann er den samme som med stillestående vann.

SLUTT